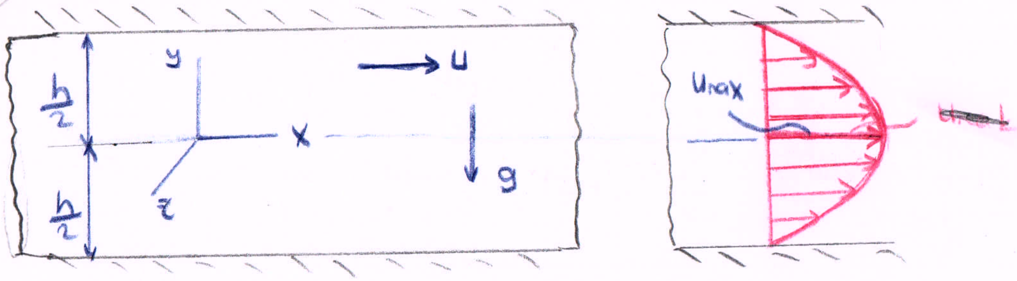
Sabit Plakalar Arasında Daimi Laminer Akış (Düzlemsel Poiseuille Akışı)



Şekilde görülen sonsuz genişlikteki ~~ve uzunluktaki~~ dar bir boşlukta Newton tipi bir akışkana ait daimi, sıkıştırılamaz laminer akışı dikkate alalım,

Kabuller

1) Plakalar x- ve z- yönünde sonsuz
2) Daimi akış
3) Paralel akış : Bu geometride akışkan parçacıkları plakalara paralel x-yönünde hareket etmektedir, y-ve z- yönünde hız söz konusu değildir.

$u \neq 0 \ , \quad v = w = 0$

4) $g_x = g_z = 0 \ , \quad g_y = -g$

5) $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \text{sabit}$

Süreklilik Denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0$$

Paralel akış   Paralel akış

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{---- (1)}$$

Denklem (1) u hızının x-yönünde değişimin söz konusu olmadığını ifade eder. (Yani akış x-yönünde TAM GELİŞMİŞ'tir). Bununla birlikte akış daimi ve plaka sonsuz genişlikte olduğu için $\left(\partial u / \partial z = 0\right)$ u sadece y'nin fonksiyonudur.

$$u = u(y) \quad \text{---- (2)}$$

Navier - Stokes Denklemleri

x - yönündeki

Daimi akış, $v=0$, $w=0$, $g_x=0$, sonsuzluk, Plakanın genişliği sonsuz

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \cancel{\rho g_x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right)$$

sonsuzluktan $\partial u/\partial x = 0$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{------} \quad (3)$$

y - yönünde

Paralel akış ($v=w=0$), Paralel akış ($v=w=0$)

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right)$$

Daimi akış

$(g_y = -g)$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \quad \text{------} \quad (4)$$

z - yönündeki

Daimi, Paralel akış ($v=w=0$), $g_z=0$, Paralel akış

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial w}{\partial t}} + \cancel{v\frac{\partial w}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \cancel{\rho g_z} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}\right)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad \text{------} \quad (5)$$

Denklem (5) basıncın z-yönde değişmediğini ifade eder. Denklem (4) ... aşağıdaki basınç alanı için

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g$$

$$\partial P = -\rho g\, \partial y$$

$$P = -\rho g y + f(x) \quad \text{---------} \quad (6)$$

Denklem (6) basıncın hidrostatik olarak y-yönünde değiştiğini gösterir.

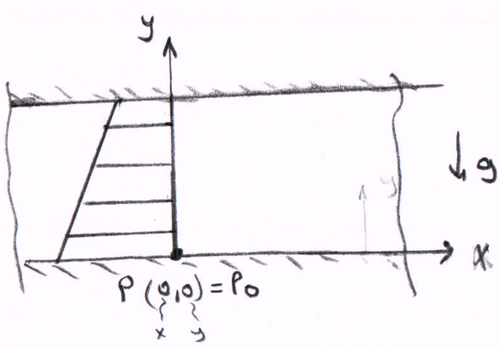
Hatırlatma ✱✱

P'nin hem x'in hem de y'nin fonksiyonu olmasından dolayı Denklem (7)'de integral sabiti yerine f(x) yani x'e bağlı bir fonksiyon eklendiğine dikkat edelim. Bunun nedeni y'ye göre kısmi integrasyon işlemi yapmamızdan kaynaklanıyor. Kısmi integrasyon işlemleri yapılırken dikkat edilmelidir.

Denklem (6) basıncın hidrostatik olarak y-yönünde değiştiğini gösterir. Yani Denklem (6) basit bir hidrostatik basınç dağılımını temsil eder. Bu durum bizi <u>hidrostatik basıncın akıştan bağımsız olarak etkilediği</u> sonucuna ulaştırır.

Hatırlatma ✱✱

Serbest yüzeylere sahip olmayan sıkıştırılamaz akış alanları için hidrostatik basınç, akış alanının dinamiğine etkide bulunmaz.



$$P(x,y) = -\rho g y + f(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = C \Rightarrow P(x) = Cx + C_1$$

$$P(x,y) = -\rho g y + Cx + C_1$$

$$P(x,y) = -\rho g y + \frac{\partial P}{\partial x} x + C_1$$

$$x = 0,\ y = 0 \rightarrow P(x,y) = P_0$$

$$P_0 = 0 + 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = P_0$$

$$\boxed{P(x,y) = -\rho g y + \frac{\partial P}{\partial x} x + P_0}$$

<u>Basınç Alanı</u>

Hız alanını belirlemek için Denklem (3) çözelim.

$$\int \frac{d^2u}{dy^2} = \int \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\int \frac{du}{dy} = \int \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y + c_1$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 + c_1 y + c_2 \quad \text{------} \quad (7)$$

denklemi elde edilir. c_1 ve c_2 integral sabitlerini belirlemek için

(S1) $y=0 \rightarrow u=0$

(S2) $y=h \rightarrow u=0$

<u>Sınır şartlarını kullanalım:</u>

(S1): $y=0 \rightarrow u=0$

$$0 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) 0^2 + c_1 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_2 = 0}$$

(S2) $y=h \rightarrow u=0$

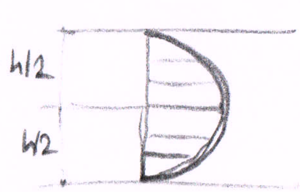
$$0 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) h^2 + c_1 h \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) h$$

Bu durumda hız dağılımı için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) y^2 - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x} h y$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(y^2 - hy\right)} \quad \text{--------} \quad (8)$$

- Akış basınç gradyanı ile doğru orantılı
- Viskozite ile ters orantılı
- Plakalar arasındaki mesafeye bağlı



∴ Plakalar arasında geçen akışın debisi Q (z-yönündeki birim uzunluk için)

$$Q = \int_0^h u(y)\, dA = \int_0^h u(y)\, dy \qquad A = y \cdot z = y \cdot (1)$$

$$\frac{dA}{dy} = 1 \Rightarrow \underline{dA = dy}$$

$$= \int_0^h \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(y^2 - hy\right) dy$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{y^3}{3} - \frac{h y^2}{2}\right)\Bigg|_0^h$$

$$= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2}\right) = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{h^3}{6}$$

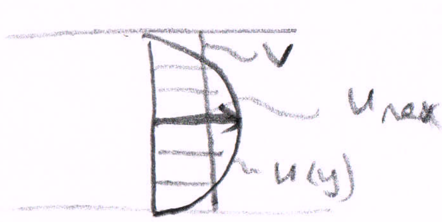
$$\boxed{Q = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x}} \qquad \text{------} \quad (9)$$

$$Q = \overset{\text{ortalama hız}}{V} \cdot A = V \cdot h \cdot (1) = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

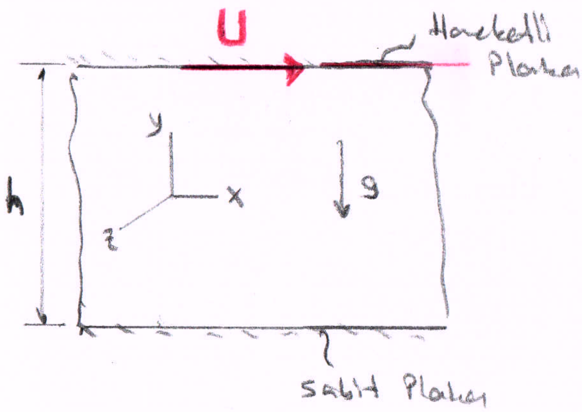
$$\boxed{V = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x}} \quad : \text{ortalama hız.}$$

$$\boxed{u_{max} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2}\right) = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{\partial P}{\partial x}} \quad : \text{Maksimum hız}$$

$$\boxed{u_{max} = \frac{3}{2} V}$$



2. Couette Akışı



$$\frac{\partial P}{\partial x} = c = \text{sabit}$$

Hız profili her iki plakanın sabit olduğu 1. Problem için elde ettiğimiz denklem (7) ile aynı olacaktır ancak sınır şartlarımız farklı:

(S1) $y=0 \rightarrow u=0$

(S2) $y=h \rightarrow u=U$

sınır şartlarını kullanarak Couette Akışı için hız profilini elde edebilmmiz:

(S1) $y=0 \rightarrow u=0$

$$0 = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)0^2 + c_1 0 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2=0}$$

(S2) $y=h \rightarrow u=U$

$$U = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^2 + c_1 h \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{U}{h} - \frac{h}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}}$$

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)y^2 + \left(\frac{U}{h} - \frac{h}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right)y$$

$$\boxed{u = U\frac{y}{h} + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(y^2 - hy\right)}$$ Hız profili

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{h} + \frac{1}{2\mu U}\frac{\partial P}{\partial x}\left(y^2-hy\right)$$ Boyutsuz hız profili

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{h} + \frac{1}{2\mu U}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h} + \frac{h}{h}\right)\cdot\left(\frac{h^2}{\cancel{h}}\right)$$

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{h} + \frac{h^2}{2\mu U}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h} - 1\right)$$

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{h} + \frac{h^2}{2\mu U}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h} - 1\right)$$

$$\boxed{u^* = y^* + \frac{1}{2}P^* y^*\left(y^* - 1\right)}$$

Boyutsuz hız profili