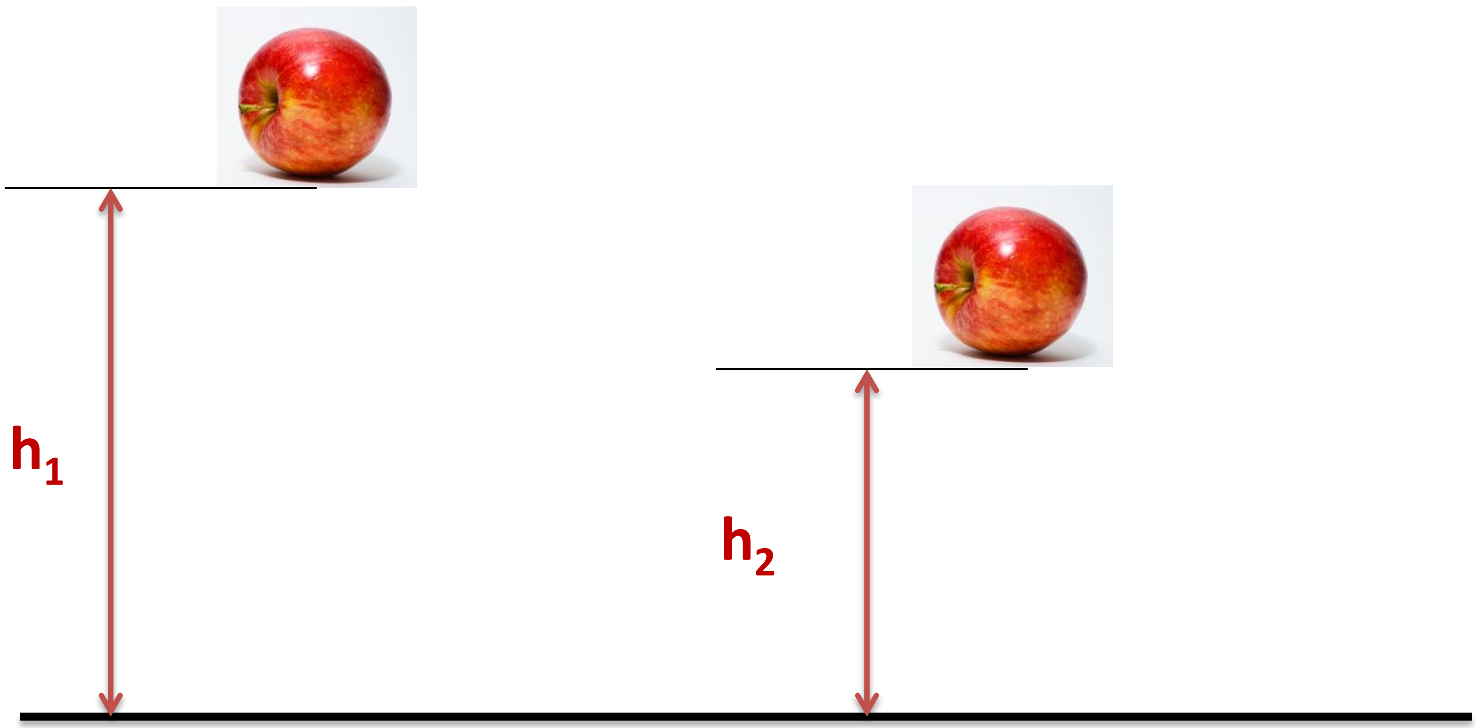
Bölüm 7: Boyut Analizi ve Modelleme

Eğer belirli bir yükseklikten bir elmayı atar ve bu yüksekliği değiştirirsek elma için düşme zamanı nasıl değişir?



Amaçlar

Boyut, Birim ve Boyutsal Homojenliği anlamak

Boyut analizinin yararlarını kavramak

Tekrarlayan değişkenler yöntemini öğrenmek

Boyutlar ve Birimler

Boyut: Bir fiziksel büyüklüğün ölçüsünü verir, örneğin uzunluk, kütle, zaman

Birim: Sayının bilinen bir ölçeğe göre niteliğini temsil eder, örneğin (m),(s),(kg)

Nicel büyüklükleri anlamlandırabilmek, kıyaslayabilmek için birimleri kullanırız. (Nicel büyüklük: Ölçülebilen, sayılabilen, miktarı tespit edilebilen azlığı yada çokluğu belirlenebilen büyüklükler (kütle, uzunluk vs.))

Birimi verilmeksizin sunulan herhangi bir niceliğin mühendislik açısından hiçbir anlamı yoktur.

Boyut : Uzunluk

Birim : m, inch, ft .....

Boyutlar ve Birimler

TABLE 7–1

Primary dimensions and their associated primary SI and English units

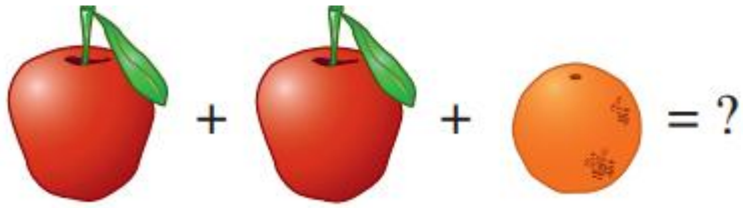
Dimension	Symbol*	SI Unit	English Unit
Mass	m	kg (kilogram)	lbm (pound-mass)
Length	L	m (meter)	ft (foot)
Time†	t	s (second)	s (second)
Temperature	T	K (kelvin)	R (rankine)
Electric current	I	A (ampere)	A (ampere)
Amount of light	C	cd (candela)	cd (candela)
Amount of matter	N	mol (mole)	mol (mole)

* We italicize symbols for variables, but not symbols for dimensions.

† Note that some authors use the symbol T for the time dimension and the symbol θ for the temperature dimension. We do not follow this convention to avoid confusion between time and temperature.

Boyutsal Homojenlik

- BH yasası, toplanan tüm terimlerin aynı boyuta sahip olması gerektiğini ifade eder (Elma+Armut ?)



You can't add apples and oranges!

- Örnek: Bernoulli denklemi

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C$$

$\{p\}$ = {kuvvet/alan}={kütle x uzunluk/zaman x 1/uznlk^2} = $\{m/(t^2L)\}$

$\{1/2\rho V^2\}$ = {kütle/uznlk^3 x (uznlk/zaman)^2} = $\{m/(t^2L)\}$

$\{\rho gz\}$ = {kütle/uzunlk^3 x uzunlk/zaman^2 x uzunlk} =$\{m/(t^2L)\}$

Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

- Boyutsal olarak homojen bir denklemin her bir terimini değişken ve sabitlerden oluşan bir gruba böldüğümüzde, denklemi boyutsuzlaştırmış oluruz. Böyle denklemlere "boyutsuz" denir.

- Boyutsuzlaştırma sonucu genellikle *Re*, *Pr*, *Fr* gibi boyutsuz sayılar elde edilir.

Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

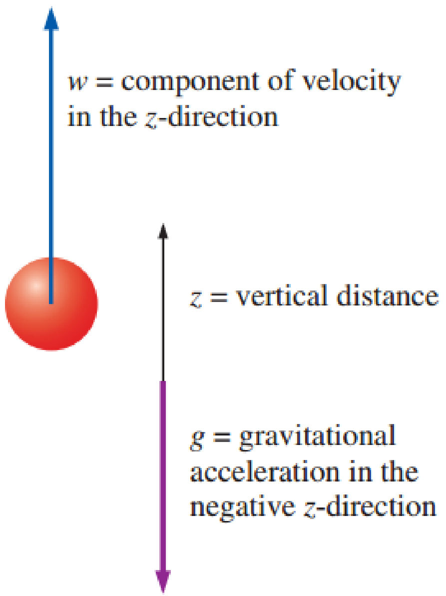
Equation of motion: $$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Dimensional result: $$\boxed{z = z_0 + w_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$$

Nondimensionalized variables: $$z^* = \frac{z}{z_0} \qquad t^* = \frac{w_0 t}{z_0}$$

Nondimensionalized equation of motion: $$\frac{d^2z^*}{dt^{*2}} = -\frac{1}{\mathrm{Fr}^2}$$

Nondimensional result: $$\boxed{z^* = 1 + t^* - \frac{1}{2\mathrm{Fr}^2} t^{*2}}$$



Object falling in a vacuum. Vertical velocity is drawn positively, so $w < 0$ for a falling object.

Boyutsuzlaştırmanın Önemi

- Önemli parametreler hakkında görüş kazandırır.
- Problemdeki parametre sayısını azaltır
  - ✓ Daha kolay iletişim (birimlerden bağımsız)
  - ✓ Daha az deney gereksinimi
  - ✓ Daha az simülasyon ihtiyacı
- Elde edilen sonuçlar denenmemiş durumların kestiriminde kullanılabilir.

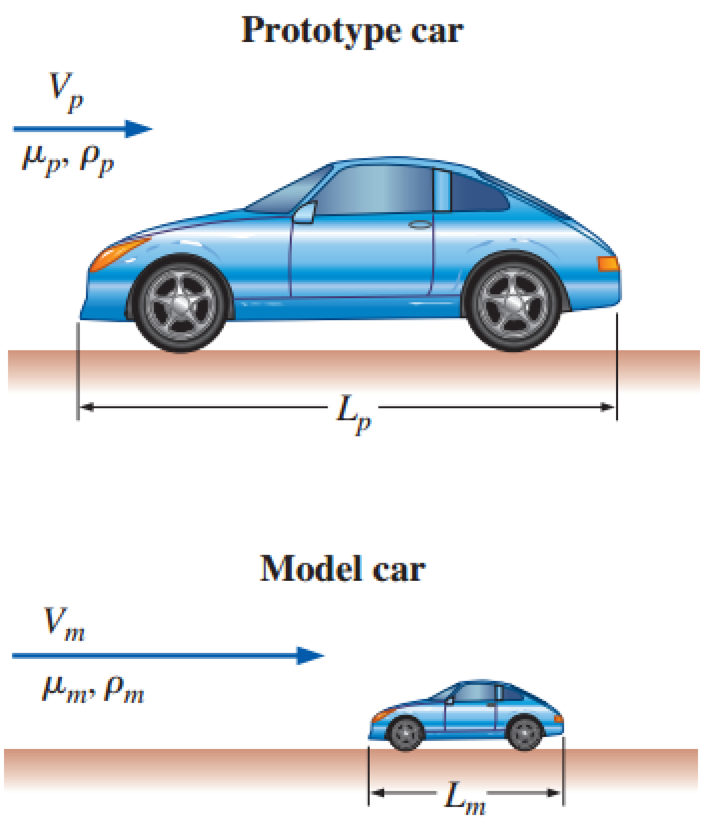
Boyut Analizi ve Benzerlik

- Bir denklemin var olması halinde boyutsuzlaştırma çok faydalıdır.
- Ancak uygulamada denklem genellikle ya bilinmez ya da çözüm çok güçtür.
  - Bu tür hallerde *deney yapmak*, güvenilir bilgi edinmenin tek yoludur.
  - Zaman ve paradan tasarruf sağlamak için deneylerde çoğu zaman geometrik olarak ölçeklendirilmiş modeller kullanılır.
  - Tam ölçekli prototip için elde edilen sonuçların anlamlı olabilmesi için deney koşulları ve sonuçlar uygun biçimde ölçeklendirilmelidir.
  - ***Boyut analizi bu hallerde çok faydalıdır***

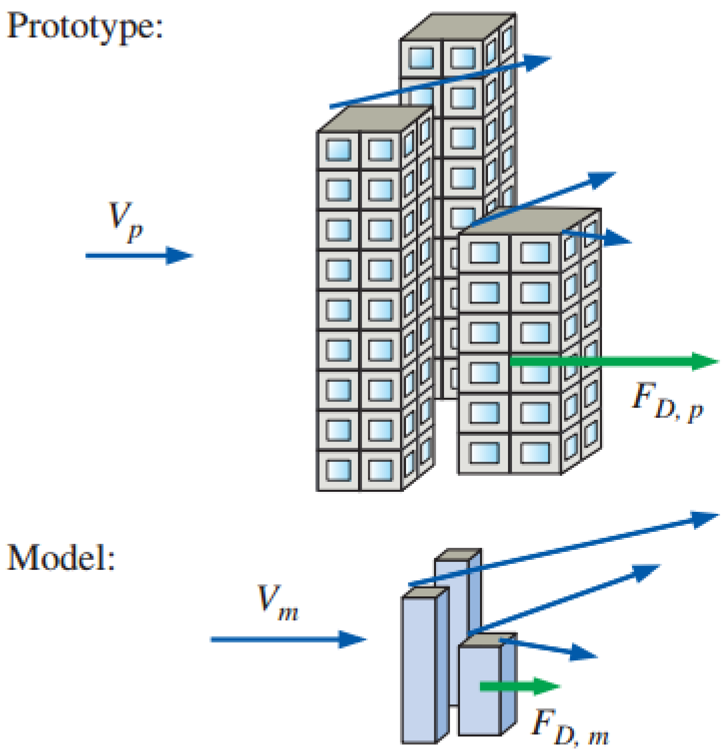
Boyut Analizi ve Benzerlik

Boyut Analizinin Amaçları

- Deney tasarlama ve sonuçların raporlanmasında yardımcı olacak boyutsuz parametreler oluşturma.
- Model üzerinden prototipin performansını kestirmek için ölçeklendirme yasaları elde etmek.
- Parametrelere arasındaki ilişkilerin trendini kestirmek.

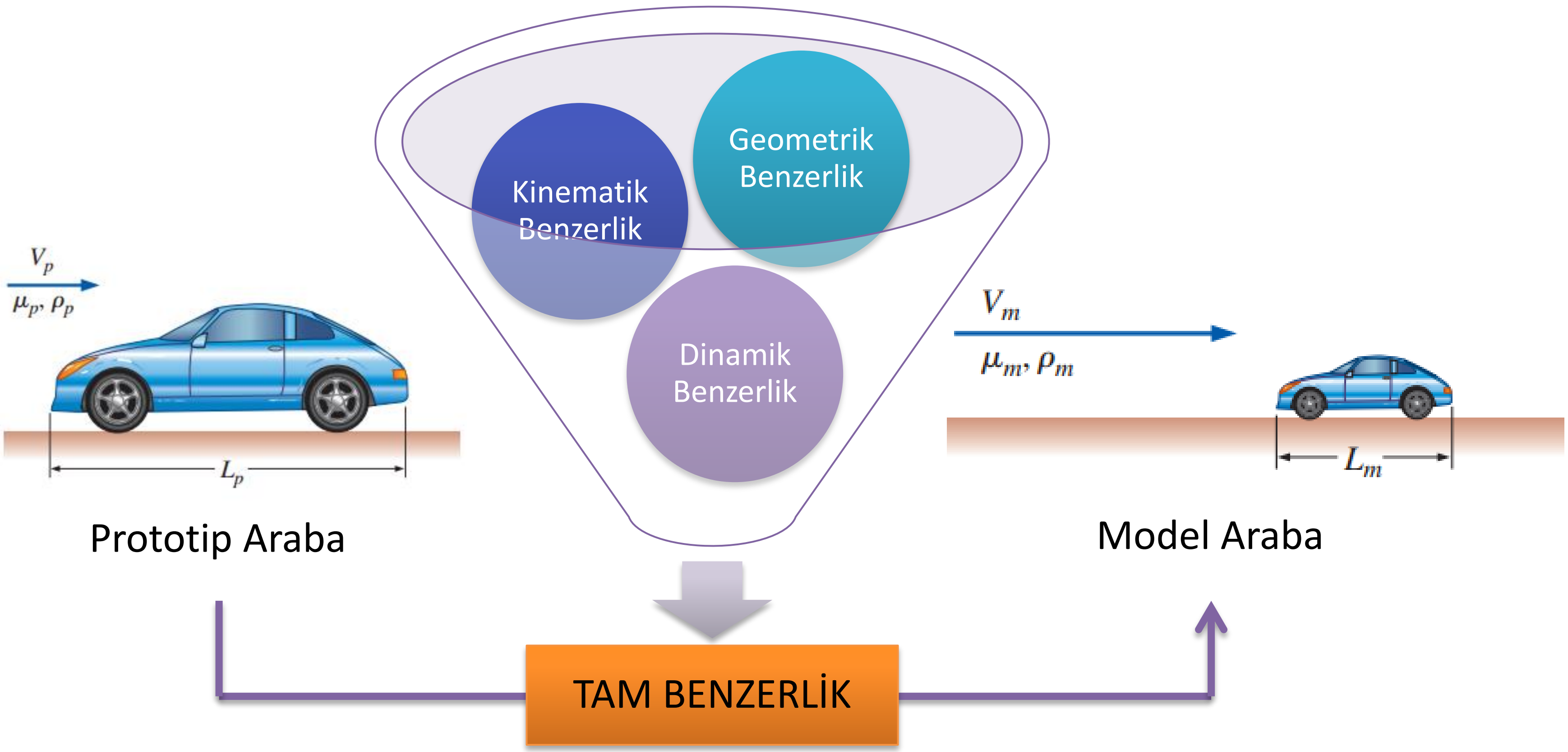


Geometric similarity between a prototype car of length L_p and a model car of length L_m.



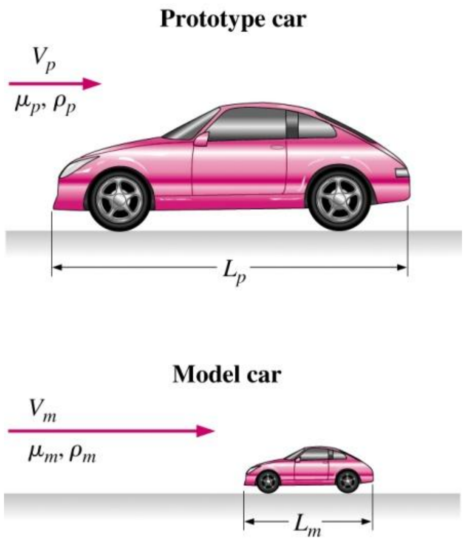
Kinematic similarity is achieved when, at all locations, the speed in the model flow is proportional to that at corresponding locations in the prototype flow, and points in the same direction.

Boyut Analizi ve Benzerlik



- **Geometrik Benzerlik** – Model ve prototip aynı geometrik şekle sahip olmalıdır. Karşılıklı boyutların oranı sabit olmalıdır.
- **Kinematik Benzerlik** – Model ve prototipte karşılıklı hızlar orantılı olmalıdır.
- **Dinamik Benzerlik** – model akışındaki *tüm kuvvetler* prototip akışta bunlara karşılık gelen kuvvetlerle orantılı olmalıdır.
- **Tam Benzerlik** – Yukarıdaki 3 benzerlik koşulu sağlanmışsa, tam benzerlik elde edilmiştir. Ancak bu her zaman mümkün olmayabilir (akarsu ve ırmak akışları)

- Tam benzerliğin sağlanabilmesi için model ve prototip arasındaki tüm Π gruplarının aynı olması gerekir.
- Peki Π nedir? Şu bizim 3.14 olan garip sayı mı?
  Re, Fr, C_D, gibi boyutsuz parametreleri büyük Π harfi ile göstereceğiz. Bunun 3.14 ile bir ilgisi yoktur!!!



- Bir otomobil deneyi ele alalım
- Direnç kuvveti $F = f(V, \rho, \mu, L)$
- Boyut analizi yardımıyla bu 5 parametreli problemi 2 parametreye indirgemek mümkündür:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \rightarrow C_D = f(Re)$$

Tekrarlayan Değişkenler Yöntemi (Buckingham Pi Teoremi)

Adım 1: Problemde verilen parametreleri listeleyin ve toplam sayısını (n) sayın.

Adım 2: n tane parametreden her birinin ana boyutlarının yazın.

Adım 3: j indirgemesini ana boyutların sayısı olarak alın. Beklenen sayıda Π ‘leri ifade eden k’yı hesaplayın, $k = n - j$

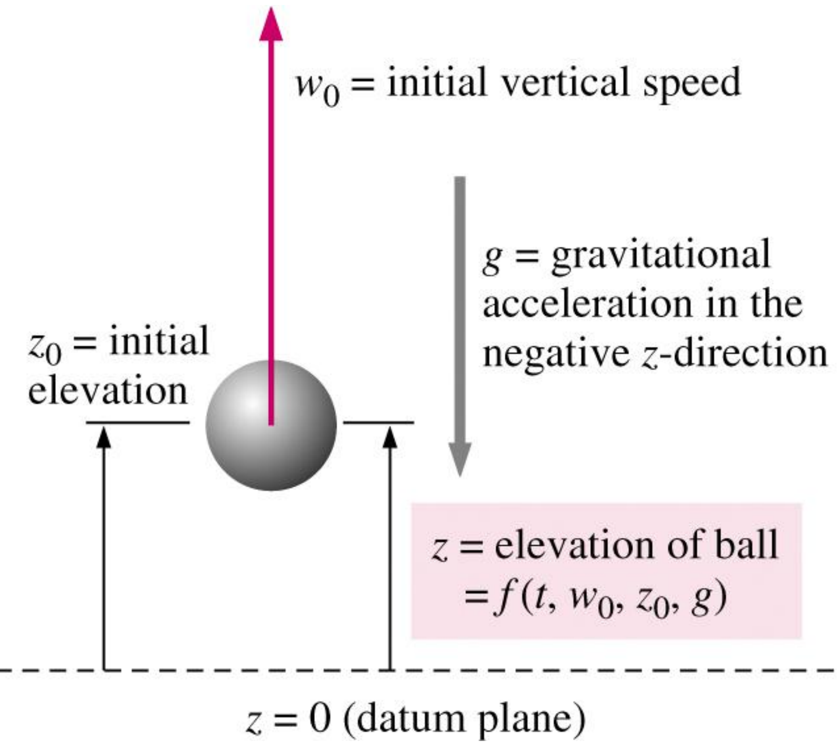
Adım 4: j adet tekrarlayan parametre seçim

Adım 5: k adet Π yi oluşturun ve gerekli olursa üzerinde işlemler yapın.

Adım 6: Nihai fonksiyonel ilişkiyi yazın ve yaptığınız cebirsel işlemleri kontrol edin.

Tekrarlayan değişkenleri seçimi son derece önemlidir. Bu konuda dikkat edilmesi gereken önemli noktalar 18 nolu slaytta özetlenmiştir.

Vakum ortamda düşen top



Adım 1: İlgili parametreler:

$$z = f(t, w_0, z_0, g) \Rightarrow n=5$$

Adım 2: Ana boyutlar

z	t	w_0	z_0	g
$\{L^1\}$	$\{t^1\}$	$\{L^1 t^{-1}\}$	$\{L^1\}$	$\{L^1 t^{-2}\}$

Adım 3: İlk tahmin olarak, iki ana boyut olduğundan(L ve t)

j =2 alalım. Buna göre beklenen Π sayısı $k = n-j = 5-2 = 3$

Adım 4: Tekrarlayan değişkenler: w_0 ve z_0

Tekrarlayan Değişkenlerin Seçimi (Adım 4)

1. Asla bağımlı değişkeni alma, aksi halde tüm Π terimlerinde görünür.
2. Seçilen parametreler kendi aralarında boyutsuz bir grup oluşturmamalı, aksi halde diğer Π terimlerini elde etme imkanı kalkar.
3. Seçilen parametreler tüm ana boyutları temsil edebilmeli.
4. Kendileri zaten boyutsuz olan parametreleri seçme.
5. Aynı boyutta ya da sadece üsleri farklı iki parametre seçme.
6. Boyutlu sabitleri boyutlu değişkenlere tercih edin, böylece boyutlu değişken tek bir Π teriminde oluşur.
7. Her Π teriminde görülebileceği için ortak parametreleri seçin.
8. Basit değişkenleri tercih edin.

Adım 5: Her seferinde tekrarlayanların dışında kalan parametrelerden birini tekrarlayanlarla çarpım halinde ifade edin. Böylece her seferinde bir Π oluşturmuş olursunuz.

$\Pi_1 = z w_0^{a1} z_0^{b1}$

- *a1* ve *b1* tespiti yapılacak sabitlerdir.
- Adım 2 deki ana boyutları kullanarak bu sabitleri bulun

$$\{\Pi_1\} = \{L^0 t^0\} = \{z w_0^{a_1} z_0^{b_1}\} = \{L^1 (L^1 t^{-1})^{a_1} L^{b_1}\}$$

- Zaman: $\{t^0\} = \{t^{-a_1}\} \to 0 = -a_1 \to a_1 = 0$
- Uzunluk:

$$\{L^0\} = \{L^1 L^{a_1} L^{b_1}\} \to 0 = 1 + a_1 + b_1 \to b_1 = -1 - a_1 \to b_1 = -1$$

- Sonuç: $\boxed{\Pi_1 = z w_0^0 z_0^{-1} = \frac{z}{z_0}}$

Adım 5 (devam)

- Aynı işlemi, bu sefer *t* yi kullanarak Π_2 için yapalım
- $\Pi_2 = t w_0^{a2} z_0^{b2}$

$$\{\Pi_2\} = \{L^0 t^0\} = \{t w_0^{a_2} z_0^{b_2}\} = \{t^1 (L^1 t^{-1})^{a_2} L^{b_2}\}$$

- Zaman: $$\{t^0\} = \{t^1 t^{-a_2}\} \rightarrow 0 = 1 - a_2 \rightarrow a_2 = 1$$
- Uzunluk:

$$\{L^0\} = \{L^{a_2} L^{b_2}\} \rightarrow 0 = a_2 + b_2 \rightarrow b_2 = -a_2 \rightarrow b_2 = -1$$

- Sonuç: $$\boxed{\Pi_2 = t w_0^1 z_0^{-1} = \frac{w_0 t}{z_0}}$$

Örnek (Devam)

Adım 5 (devam)

- Son olarak *g* yi alarak Π_3 ü oluşturalım
- $\Pi_3 = g w_0^{a3} z_0^{b3}$

$$\{\Pi_3\} = \{L^0 t^0\} = \{g w_0^{a_3} z_0^{b_3}\} = \{L^1 t^{-2} (L^1 t^{-1})^{a_3} L^{b_3}\}$$

- Zaman: $\{t^0\} = \{t^{-2} t^{-a_3}\} \rightarrow 0 = -2 - a_3 \rightarrow a_3 = -2$
- Uzunluk:

$$\{L^0\} = \{L^1 L^{a_3} L^{b_3}\} \rightarrow 0 = 1 + a_3 + b_3 \rightarrow b_3 = -1 - a_3 \rightarrow b_3 = 1$$

- Sonuç $\boxed{\Pi_3 = g w_0^{-2} z_0^1 = \frac{g z_0}{w_0^2}}$

$$\boxed{\Pi_{3,modified} = \left(\frac{g z_0}{w_0^2}\right)^{-1/2} = \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}} = Fr}$$

Örnek (Devam)

Step 6:

- Elde ettiğin Π'ler gerçekten boyutsuz mu? Kontrol et!!
- Sonuç ifadeyi yaz:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3) \rightarrow \frac{z}{z_0} = f\left(\frac{w_0 t}{z_0}, \frac{w_0}{\sqrt{g z_0}}\right)$$

- Veya boyutsuz değişkenler cinsinden;

$$z^* = f(t^*, Fr)$$

DİKKAT: Bu yöntem boyutsuz Π' grupları arasındaki fonksiyonel ilişkiyi doğru biçimde ortaya koymaktadır, ancak denklemin <u>tam matematiksel biçimi konusunda fikir vermez.</u>

TABLE 7–5

Some common established nondimensional parameters or Π's encountered in fluid mechanics and heat transfer*

Name	Definition	Ratio of Significance
Biot number	$\mathrm{Bi} = \dfrac{hL}{k}$	$\dfrac{\text{Surface thermal resistance}}{\text{Internal thermal resistance}}$
Darcy friction factor	$f = \dfrac{8\tau_w}{\rho V^2}$	$\dfrac{\text{Wall friction force}}{\text{Inertial force}}$
Drag coefficient	$C_D = \dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$	$\dfrac{\text{Drag force}}{\text{Dynamic force}}$
Froude number	$\mathrm{Fr} = \dfrac{V}{\sqrt{gL}}\left(\text{sometimes } \dfrac{V^2}{gL}\right)$	$\dfrac{\text{Inertial force}}{\text{Gravitational force}}$
Grashof number	$\mathrm{Gr} = \dfrac{g\beta\lvert\Delta\rvert TL^3\rho^2}{\mu^2}$	$\dfrac{\text{Buoyancy force}}{\text{Viscous force}}$
Knudsen number	$\mathrm{Kn} = \dfrac{\lambda}{L}$	$\dfrac{\text{Mean free path length}}{\text{Characteristic length}}$

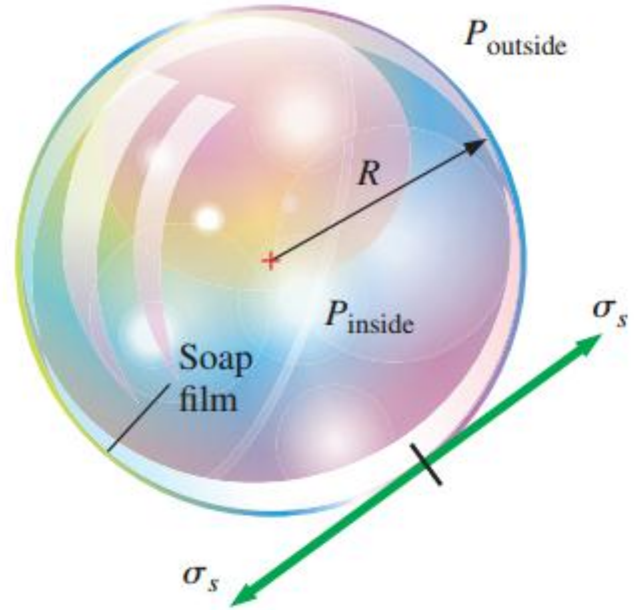
TABLE 7–5

Some common established nondimensional parameters or Π's encountered in fluid mechanics and heat transfer*

Name	Definition	Ratio of Significance
Mach number	Ma (sometimes M) $= \dfrac{V}{c}$	$\dfrac{\text{Flow speed}}{\text{Speed of sound}}$
Nusselt number	$\text{Nu} = \dfrac{Lh}{k}$	$\dfrac{\text{Convection heat transfer}}{\text{Conduction heat transfer}}$
Prandtl number	$\text{Pr} = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{\mu c_p}{k}$	$\dfrac{\text{Viscous diffusion}}{\text{Thermal diffusion}}$
Reynolds number	$\text{Re} = \dfrac{\rho VL}{\mu} = \dfrac{VL}{\nu}$	$\dfrac{\text{Inertial force}}{\text{Viscous force}}$

Örnek : Sabun Köpüğümdeki Basınç

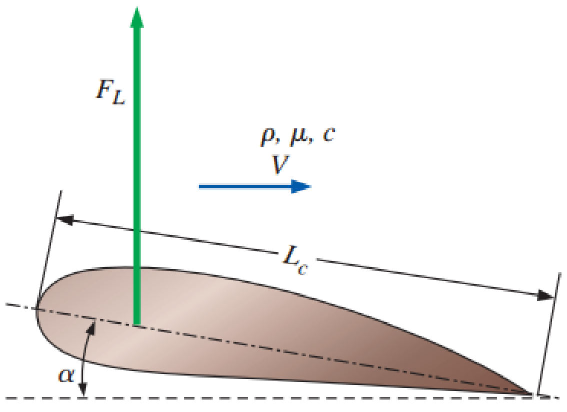
Çocuklar sabun köpüğü ile oynarken siz de köpük yarıçapı ile köpüğün iç basıncı arasındaki ilişkiyi merak ediyorsunuz. Sabun köpüğündeki iç basıncın atmosfer basıncından daha büyük ve bu yüzden köpüğün yüzeyinin balon gibi gerilme altında olduğunun düşünüyorsunuz. Ayrıca bu problemde yüzey geriliminin de etkili olması gerektiğini biliyorsunuz. Diğer fiziksel konuları bilmeden, boyut analizini kullanarak problemi çözmeye karar veriyorsunuz. Basınç farkı $\Delta P = P_{iç}$- $P_{dış}$ köpük yarıçapı R ve sabun filminin yüzey gerilimi $\sigma_s$arasında bir ilişki kurunuz.



Sabun filmindeki yüzey geriliminden dolayı, sabun köpüğünün iç basıncı kendisini çevreleyen ortam basıncından daha büyüktür.

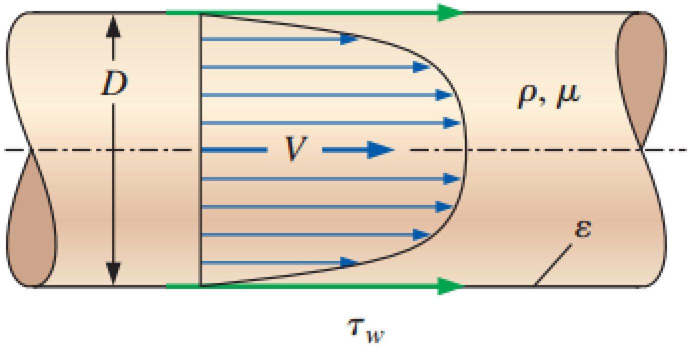
Örnek : Kanat Üzerindeki Kaldırma Kuvveti

Uçak mühendislerinden oluşan bir ekip yeni bir uçak kanadı tasarlıyorlar ve tasarladıkları bu kanadın oluşturacağı kaldırma kuvvetini hesaplamak istiyorlar. Kanadın kiriş uzunluğu $Lc = 1.12\, m$ ve üst bakış alanı $A = 10.7\, m^2$ dir (kanadın hücum açısı $\alpha = 0$olduğu durum için üsten bakıldığında görülen alan). Prototip $T = 25\ {}^0C$ sıcaklığındaki yere yakın bir bölgede $V = 52\, m/s$ hız ile uçacaktır. Rüzgar tüneli en fazla $5\, atm$ basınca kadar basınçlandırılabilir. Basınçlı rüzgar tünelinde test etmek üzere kanadın $1/10$ ölçekli modelini yapılmıştır. Dinamik sağlamak için rüzgar tüneli hangi hız ve basınçta çalıştırılmalıdır?



Lift F_L on a wing of chord length L_c at angle of attack α in a flow of free-stream speed V with density ρ, viscosity μ, and speed of sound c. The angle of attack α is measured relative to the free-stream flow direction.

Örnek : Boru İçerisindeki Akışta Sürtünme Kaybı



Friction on the inside wall of a pipe. The shear stress τ_w on the pipe walls is a function of average fluid speed V, average wall roughness height ε, fluid density ρ, fluid viscosity μ, and inside pipe diameter D.