BİLECİK ŞEYH EDEBALİ ÜNİVERSİTESİ

MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

MEKANİK TİTREŞİMLER

(SÖNÜMSÜZ ZORLANMIŞ TİTREŞİMLER)

DENEY FÖYÜ

Deney Yürütücüsü: Yrd. Doç. Dr. Ömer Kadir MORGÜL

Deney Yardımcısı: Arş. Gör. Ersel BALİ

Hazırlayan: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin DAL

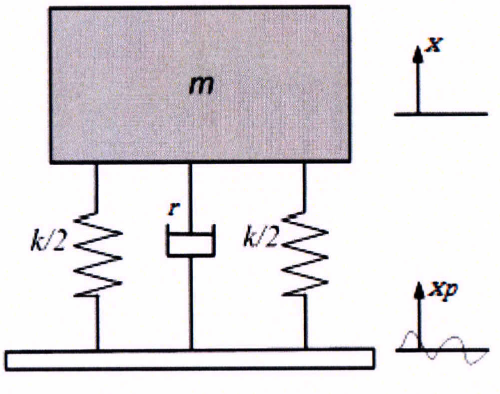
ZORLANMIŞ TİTREŞİMLER DENEYİ

1. SİMGELER

m	Kütle [kg]
k	Yay katsayısı [N/m]
r	Sönüm katsayısı [Ns/m]
r_c	Kritik sönüm katsayısı [Ns/m]
x	Kütlenin hareketi [m]
x_p	Platformun hareketi [m]
X	Kütlenin max. genliği [m]
X_p	Platformun max. genliği [m]
ω	Tahrik kuvvetinin frekansı [rad/s]
ω_n	Sistemin doğal frekansı ($\omega_n=\sqrt{k/m}$) [rad/s]
ω_d	Sönümlü doğal frekans [rad/s]
f	Tahrik kuvvetinin frekansı [Hz]
f_n	Sistemin doğal frekansı [Hz]
$\lambda, \psi, \varepsilon$	Faz açıları
δ	Sönüm sabiti ($\delta = r/2m$) [1/s]
A_0, A, B	Başlangıç şartlarına bağlı sabitler
η	Frekans oranı ($\eta=\omega/\omega_n$)
D	Sönüm faktörü ($D=r/r_c$)
G	Geçirgenlik (hareket iletimi) ($G=X/X_p$)

2. TEORİK ESASLAR

Bu deneyde, yay tespit yerinin hareketi sonucu meydana gelen zorlanmış titreşim durumu incelenecektir. Bu model aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 1 Platform hareketli zorlanmış titreşim durumu

Buna göre, m kütlesine tesir eden yay ve sönüm kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\text{Yay kuvveti} = F_{yay} = -k(x - x_p) \tag{1}$$

$$\text{Sönüm kuvveti} = F_{sönüm} = -r(\dot{x} - \dot{x}_p) \tag{2}$$

O halde x'in mutlak hareketinin diferansiyel denklemi,

$$m\ddot{x} = r(\dot{x} - \dot{x}_p) + k(x - x_p) \tag{3}$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = kx_p + r\dot{x}_p \tag{4}$$

şeklindedir. Bu dd.'in çözümü olarak,

$$x_p = X_p \cos \omega t \tag{5}$$

yazılabilir. Bu (5) çözüm denklemi, (4) dd.'de yerine konulursa,

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = kX_p \cos \omega t - r\omega X_p \sin \omega t \tag{6}$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = X_p\sqrt{k^2 + r^2\omega^2} \cos(\omega t + \lambda) \tag{7}$$

dd. elde edilir. Burada λ faz açısı olup aşağıdaki gibidir.

$$\lambda = \text{arctg}\frac{r\omega}{k} \tag{8}$$

Denklem (7) dd.'inde, λ faz farkını ortadan kaldırmak için, farklı bir $\bar{t}$ zamanına göre düzenlenirse,

$$\bar{t} = t + \frac{\lambda}{\omega} \tag{9}$$

olur ve bu durumda hareketin (7) dd.'i,

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = X_p\sqrt{k^2 + r^2\omega^2} \cos \omega\bar{t} \tag{10}$$

şekline gelir. Bu durumda hareketin dd.'inin çözümü için

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d \bar{t} + \varepsilon) + X \cos(\omega\bar{t} - \psi) \tag{11}$$

Bu çözüm, sönümlü serbest titreşimle zorlanmış titreşimin toplamından oluşmaktadır. Başlangıçta, serbest titreşimin etkisi mevcut olmakla beraber, belirli bir zaman sonra bu etki ihmal edilecek kadar küçülerek, zorlanmış titreşim adı verilen partiküler (özel) çözüm önem kazanır. Bunun için (11) çözüm fonksiyonunun sönümlü serbest titreşim kısmı ihmal edilerek, yalnızca zorlanmış titreşim kısmı alınır. Bu durumda çözüm fonksiyonu aşağıdaki hale gelir.

$$x = X \cos(\omega\bar{t} - \psi) \tag{12}$$

Bu çözüm fonksiyonunun aşağıdaki gibi de yazılabileceği açıktır.

$$x = A \cos \omega\bar{t} + B \sin \omega\bar{t} \tag{13}$$

Bu (13) çözüm olması için (10) dd.'ini sağlaması gerekir.

$$m(-A\omega^2 \cos\omega\bar{t} - B\omega^2 \sin\omega\bar{t}) + r(-A\omega \sin\omega\bar{t} + B\omega\cos\omega\bar{t}) + k(A\cos\omega\bar{t} + B\sin\omega\bar{t}) = X_p\sqrt{k^2 + r^2\omega^2}\cos\omega\bar{t} \tag{14}$$

$$-m\omega^2 A\cos\omega\bar{t} - m\omega^2 B\sin\omega\bar{t} - r\omega A\sin\omega\bar{t} + r\omega B\cos\omega\bar{t} + kA\cos\omega\bar{t} + kB\sin\omega\bar{t} = X_p\sqrt{k^2 + r^2\omega^2}\cos\omega\bar{t} \tag{15}$$

$$(kA - m\omega^2 A + r\omega B)\cos\omega\bar{t} + (-r\omega A + kB - m\omega^2 B)\sin\omega\bar{t} = X_p\sqrt{k^2 + r^2\omega^2}\cos\omega\bar{t} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}(k - m\omega^2)A + r\omega B &= X_p\sqrt{k^2 + r^2\omega^2} \\ -r\omega A + (k - m\omega^2)B &= 0\end{aligned} \tag{17}$$

Denklemlerine ulaşılır. Buradan,

$$A = \frac{X_p\sqrt{k^2 + r^2\omega^2}(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2} \quad , \quad B = \frac{X_p r\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2} \tag{18}$$

Bu A ve B, (13)'de yerine konulursa zorlanmış titreşim bulunmuş olur. Ancak çözümün çeşitli parametrelere göre (12) şeklinde incelenmesi daha elverişlidir. Bunun için aşağıdaki işlemler takip edilirse,

$$X = \sqrt{A^2 + B^2} \quad , \quad tg\,\psi = \frac{B}{A} \tag{19}$$

$$X = \frac{X_p\sqrt{k^2 + r^2\omega^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}} \quad , \quad tg\,\psi = \frac{r\omega}{k - m\omega^2} \tag{20}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki düzenlemeler yapılarak tekrar düzenlenirse,

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \; , \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_n} \; , \quad r_c = 2m\omega_n \; , \quad k = \frac{r_c\omega_n}{2} \; , \quad D = \frac{r}{r_c} \; , \quad G = \frac{X}{X_p} \tag{21}$$

$$\boxed{G = \left|\frac{X}{X_p}\right| = \frac{\sqrt{1 + 4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}} \; , \quad tg\,\psi = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \tag{22}$$

Buradaki kütlenin genliğinin platformun genliğine oranına (X/Xp), "Geçirgenlik" veya "İletkenlik" denir ve kısaca G ile gösterilir. ψ ise, her ikisi de harmonik değişen zorlayıcı platform hareketi ile zorlanmış titreşim arasındaki faz açısını göstermektedir.

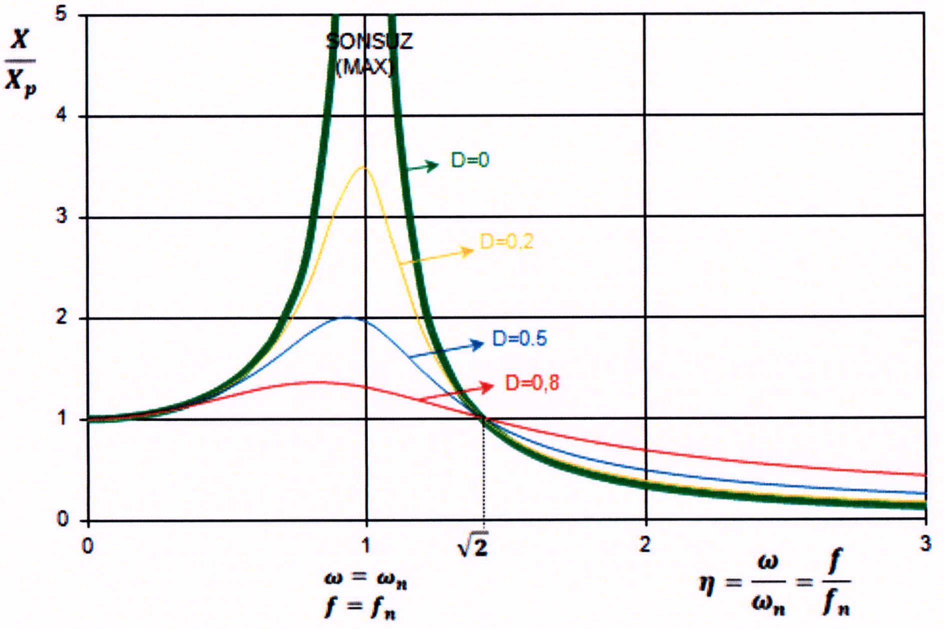
Sönüm parametresi D'nin, çeşitli değerleri için $G(\eta; D)$ fonksiyonu η, G düzleminde çizdirilerek, G'nin η'ya göre değişimi incelenebilir (Şekil 2).

Sistemin sönümsüz ($D = 0$) olması halinde, (22) denklemi,

$$G = \frac{1}{|1 - \eta^2|} \tag{23}$$

olur. Bu durumda, $\eta = 1$ $(\omega = \omega_n)$ için G sonsuza, $\eta = 0$ için $G = 1$ ve $\eta \to \infty$ için $G \to 0$ olduğu görülmektedir. İşte zorlayıcı kuvvetin frekansının, sistemin doğal frekansına eşit olduğu zaman, G'nin dolayısıyla titreşim genliğinin sonsuz olmasına "*rezonans*" hali, $\omega = \omega_n$ frekansına da "*rezonans frekansı*" denilmektedir.

Sönüm olması hallerinde genlik eğrileri, $\eta < \sqrt{2}$ için sönümsüz $(D = 0)$ haldeki eğrilerin altında $(G > 1)$, $\eta > \sqrt{2}$ için sönümsüz $(D = 0)$ haldeki eğrilerin üstünde $(G < 1)$ kalır. Ayrıca hepsi $\eta = 0$ için $G = 1$ değerini alır.



Şekil 2 Geçirgenlik diyagramı

Zorlanmış Titreşimin Genel Çözümü

Zorlanmış titreşimin genel çözümü (29)'daki gibi elde edilir. Sönümsüz durum için $\eta = 0.5$ ve $\eta = 1.5$ frekans oranları için zorlanmış titreşim cevapları Şekil 3'te verilmiştir. Görüldüğü gibi $\eta = 1.5$ durumunda genlik değerleri, $\eta = 0.5$ durumundan daha düşüktür.

$$\psi = arctg\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) \quad , \quad \lambda = \mathrm{arctg}(2D\eta) \tag{24}$$

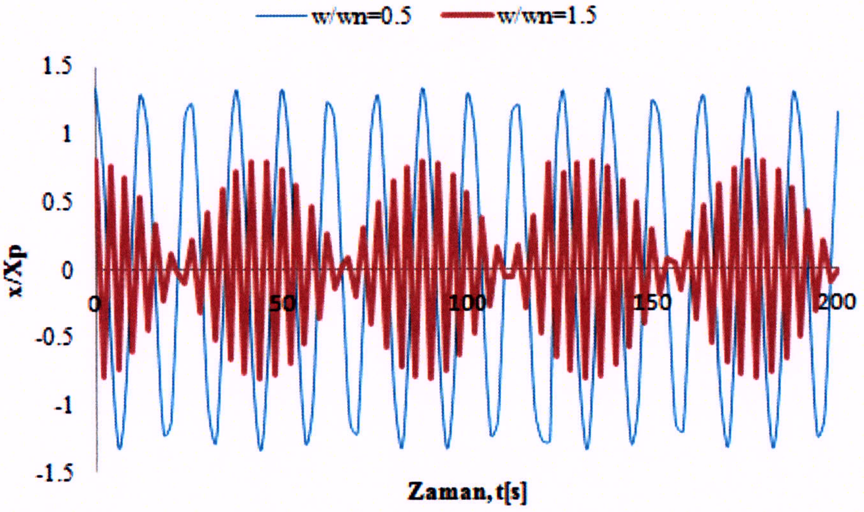
$$\bar{t} = t + \frac{\lambda}{\omega} \tag{25}$$

$$x = X\cos(\omega\bar{t} - \psi) \tag{26}$$

$$x = X\cos(\omega t + \lambda - \psi) \tag{27}$$

$$x = X_p \frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \cos(\omega t + \lambda - \psi) \tag{28}$$

$$\boxed{\frac{x}{X_p} = \frac{1}{|1-\eta^2|}\cos(\omega t + \lambda - \psi)} \qquad => \qquad D = 0 \; i\c{c}in \tag{29}$$

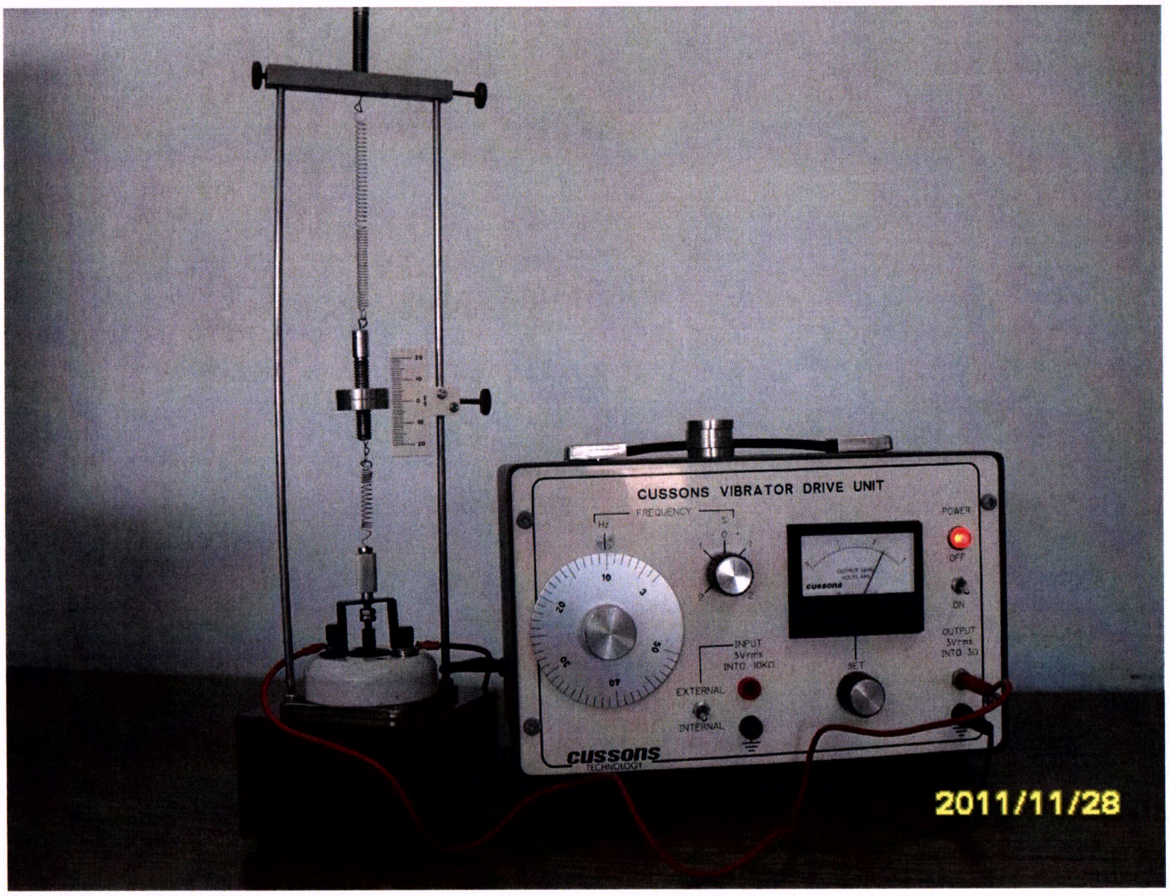


Şekil 3 $\eta = 0.5$ ve $\eta = 1.5$ için sönümsüz zorlanmış titreşim cevapları

3. DENEYİN AMACI, DENEY DÜZENEĞİ VE DENEYİN YAPILIŞI

Deneyin Amacı : Sönümsüz bir kütle yay sisteminin doğal frekansını deneysel yolla elde etmek ve *rezonans* olayını anlamak.

Deney Düzeneği



Şekil 4 Deney düzeneği

Deney düzeneği sinyal kontrol ünitesi ve titreşim jeneratörü (shaker) olmak üzere iki önemli donanımdan oluşmaktadır. Shaker üzerine monte edilebilen kütle yay sistemi mevcuttur. Sinyal kontrol ünitesi üzerinde, shakera iletilen sinyalin frekansını manüel olarak kontrol etmeyi sağlayan, frekans kontrol düğmesi bulunmaktadır Şekil 4.

Deneyin Yapılışı

Gerekli deney düzeneği hazırlanıp bağlantılar sağlandıktan sonra sistem çalıştırılınca, yay kütle sisteminin bağlandığı platform shaker vasıtasıyla belli bir frekansta titreşime maruz bırakılmaktadır. Platformun hareketiyle de, yay kütle sisteminde titreşim oluşmaktadır.

Öncelikle tüm sistem stabil bir masa üzerine yerleştirilmelidir. Çünkü mevcut yay-kütle sistemi hassas olduğu için, dış ortam titreşimlerinden etkilenmemelidir. Sinyal kontrol ünitesi üzerindeki frekans ayarı en az konuma getirilir. Sistem üzerinde önceden meydana gelen dış ortam kaynaklı titreşimlerin yok olması beklenir. Sistem tamamen hareketsiz olunca, sinyal kontrol ünitesi açılır. Açılır açılmaz shaker vasıtasıyla sistem titreşime başlar. Sonra frekans ayarı, çok yavaş şekilde küçük aralıklarla maximum seviyeye kadar arttırılmaya devam edilir. Bu esnada sistemin titreşimlerinde değişimler dikkatle takip edilir. Aynı işlem bu kez, frekans ayarı maximumdan minimuma getirilinceye kadar devam edilerek sistem titreşimleri büyük bir dikkatle izlenir. Bu süreç esnasında sistem titreşimlerinin en fazla görüldüğü durumdaki frekans değeri not edilir. "*Zorlayıcı kuvvetin frekansıyla sistemin doğal frekansı eşit olduğunda, titreşim genlikleri sonsuz veya maximum olur*" prensibinden hareketle, not edilen bu frekans değeri sistemin doğal frekansıdır denir.