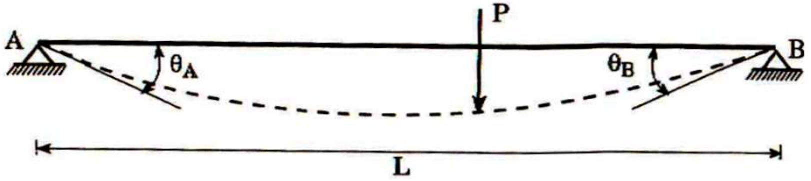
YAPI STATİĞİ II

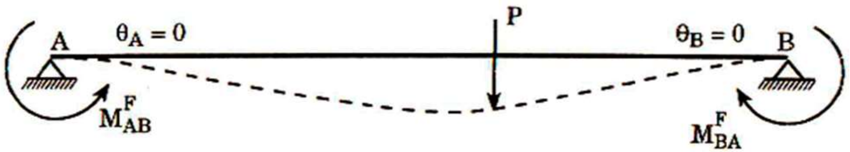
CROSS METODU

(Moment-Dağıtma Yöntemi)

Hazırlayan: Dr.Öğretim Üyesi Kıvanç TAŞKIN

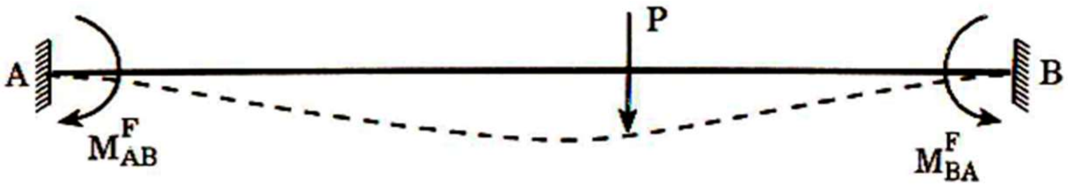


Basit kirişin yapmış olduğu deformasyon (elastik eğri), A ve B noktalarında sırasıyla θ_A ve θ_B açılarını (mesnet dönme açıları) oluşturur. Mesnetler mafsallı olduğu için analiz aşamasında bu açılar ile ilgilenilmez.



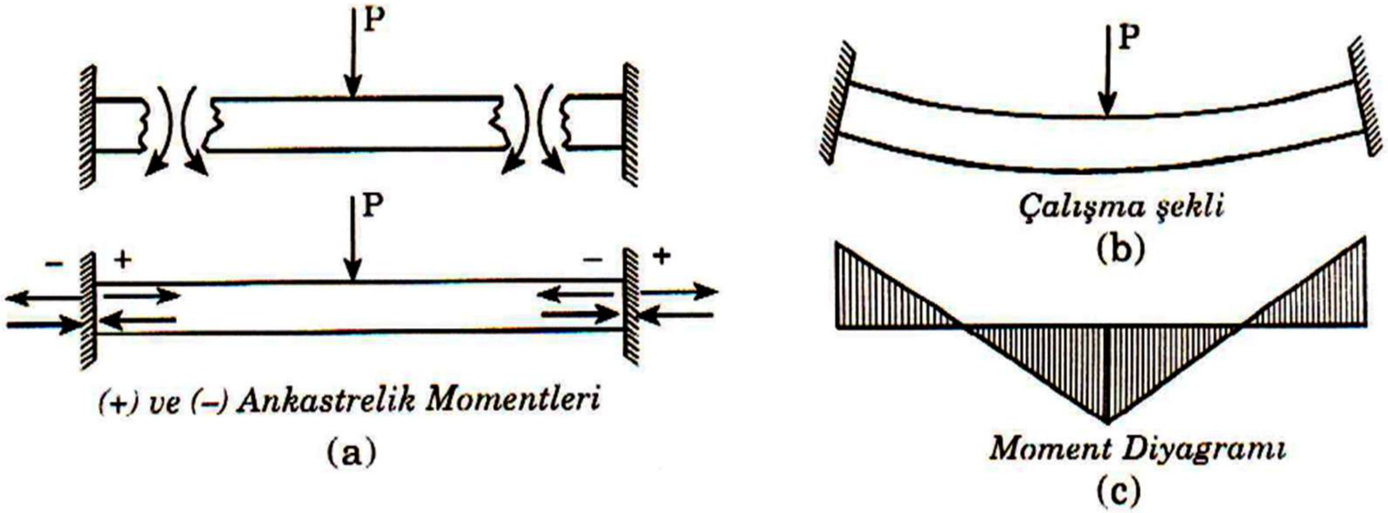
Basit kirişin mafsallarında dönmeye karşı bir önlem aldığımızı düşünelim. Bu durum, ancak mesnetlere birer moment yerleştirmek suretiyle mümkün olur.

Burada önemli olan, farklı moment şiddetlerinde θ_A ve θ_B açılarının alacağı değerler yerine, θ_A ve θ_B açılarını sıfır yapacak M_{AB} ve M_{BA} nın alacağı değerlerdir. Mesnet dönme açılarının sıfır olması durumunda ki M_{AB} ve M_{BA} moment değerlerine, ankastrelik momenti adı verilmektedir. Bu değerler tablolardan alınmaktadır.



İşaret Kuralı:

Genel olarak, düğüm noktasını saat yönünde döndüren (kiriş tepkisi saat yönünün aksinde oluşur) ankastrelik momenti (+) kabul edilir. Bu durumda M_{AB} pozitif, M_{BA} negatiftir. (Ankastrelik momentler için geçerli)



(+) ve (–) Ankastrelik Momentleri
(a)

Çalışma şekli
(b)

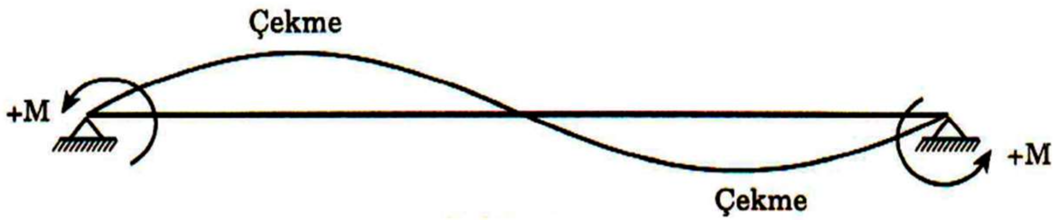
Moment Diyagramı
(c)

- **Statik çözümlemede** işaret yönü:
- Elemanlarda TERS SAAT YÖNÜ
- Düğüm noktalarında SAAT YÖNÜ

(+)

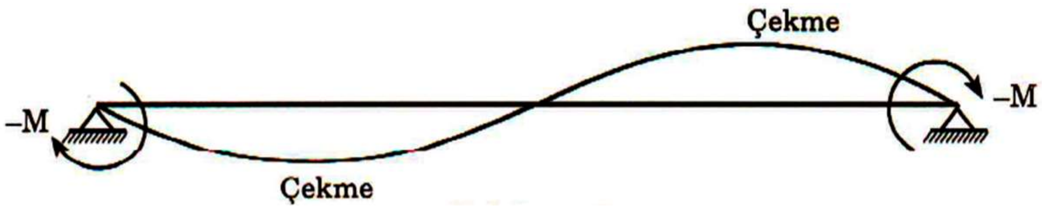
İşlem Sonunda İşaret Kuralı:

Cross yöntemi uygulandıktan sonra ortaya çıkan moment değerlerinin işaret kuralı ise, ankastrelik momentlerinin işaret kuralından farklıdır. İşlem sonunda ortaya çıkan momentlerin kirişin alt yüzünde veya üst yüzünde meydana getirdiği çekme gerilmesine göre işaretler belirlenmektedir.



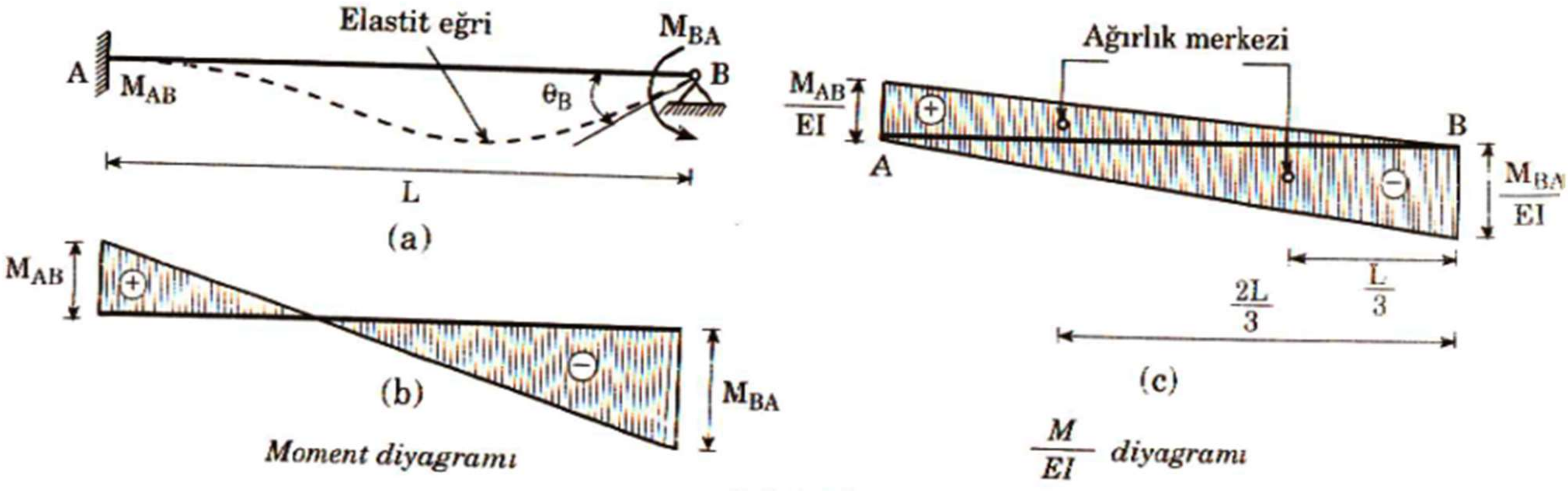
(+) ankastrelik momentleri kirişin sol mesnedinde üst yüzde çekme meydana getirirken, sağ alt mesnedinde ise alt yüzde çekme meydana getirmektedir.

Bu nedenle, sol mesnette yer alan pozitif ankastrelik momenti negatif (-) değerli iken, sağ mesnette yer alan pozitif ankastrelik momenti ise pozitif (+) değerli olur. Grafikler bu kurala göre çizilir. Çerçeve sistemlerde yer alan kolon elemanlarda benzer işlem bakış yönüne göre yapılır.



(-) ankastrelik moment durumunda ki işaret kuralı şekilde verilmiştir.

REDÖR (STIFFNESS), TAŞIMA VE DAĞITMA KATSAYILARI



Şekildeki kirişin B mesnedine M_{BA} momenti uygulayalım. M_{BA} momenti etkisinde B mesnedi dönmeye çalışacak ve θ_B açısı oluşacaktır. M_{BA} momenti B mesnedini döndürürken, A mesnedi dönmeyecek ve bu mesnette M_{AB} momenti ortaya çıkacaktır. M_{AB} ve M_{BA} momentleri arasındaki bağıntı: (I veya J atalet momenti)

$$M_{AB} = \frac{M_{BA}}{2} \quad \text{veya} \quad \frac{M_{AB}}{M_{BA}} = 1/2 \quad \text{ve} \quad \theta_B = \frac{M_{BA}\,L}{4EJ} \quad \text{veya} \quad \frac{M_{BA}}{\theta_B} = \frac{4EJ}{L}$$

$$\frac{M_{AB}}{M_{BA}} = 1/2$$

Basit mesnede uygulanan M_{BA} momenti ile M_{BA} nın A mesnedinde oluşturduğu moment arasındaki ilişkiye ***taşıma katsayısı*** adı verilir.

$$\frac{M_{BA}}{\theta_B} = \frac{4EJ}{L}$$

B mesnedinde oluşan θ_B dönmesi ile M_{BA} momenti arasındaki ilişkiye ***redör*** denilir.

Moment- Alan Teoremleri:

1. ***Teorem:*** İki nokta arasındaki moment diyagramının alanı, elastik eğrinin iki noktadaki tanjantlarının (eğimlerinin) arasındaki açıya eşittir.

2. ***Teorem:*** İki nokta arasındaki moment diyagramının oluşturduğu alanın birinci noktaya göre statik (alan) momenti, birinci noktanın (statik moment alınan eksenin) deformasyonunu (deplasmanını) verir.

1. *Teorem:*

Ankastre mesnette dönme olamayacağı için $\theta_A = 0$ olacaktır. A ve B noktaları arasındaki elastik eğirinin eğimlerinin değişimi (tanjantları arasındaki fark) θ_B yi verecektir.

1. Moment–alan teoremini uygulayanak, θ_B açısının değeri bulunabilir.

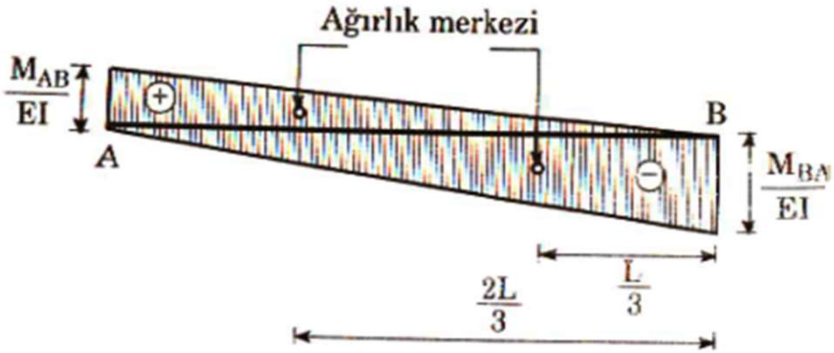
$$-\theta_B = -\frac{M_{BA}}{EJ}(L)\,\frac{1}{2} + \frac{M_{AB}}{EJ}(L)\,\frac{1}{2}$$

$$-\theta_B = \frac{L}{2EJ}(M_{AB} - M_{BA}) \qquad M_{AB} = \frac{M_{BA}}{2} \text{ oranı yerine konursa}$$

$$-\theta_B = \frac{L}{2EJ}\left(\frac{M_{BA}}{2} - M_{BA}\right) \text{ olur.} \qquad \theta_B = +\frac{M_{BA}\,L}{4EJ} \text{ elde edilir.}$$

Buradan, $M_{BA} = \dfrac{4EJ\,\theta_B}{L}$ olarak bulunur.

2. *Teorem:*



B noktasına göre moment alırsak

$$-\frac{M_{BA}}{EJ}(L)\,\frac{1}{2}\,\frac{L}{3} + \frac{M_{AB}}{EJ}(L)\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}(L) = 0$$

$$\frac{M_{AB}}{EJ}\,\frac{L^2}{3} = \frac{M_{BA}}{EJ}\,\frac{L^2}{6} \qquad \text{Burada, } M_{AB} = \frac{M_{BA}}{2} \text{ veya } \frac{M_{AB}}{M_{BA}} = \frac{1}{2}$$

taşıma katsayısı

Bir ucu mafsallı ve bir ucu ankastre olan bir kirişin mafsallı ucuna bir moment uygulandığında, ankastre mesnette oluşacak moment serbest uca uygulanan momentin yarısı kadardır.

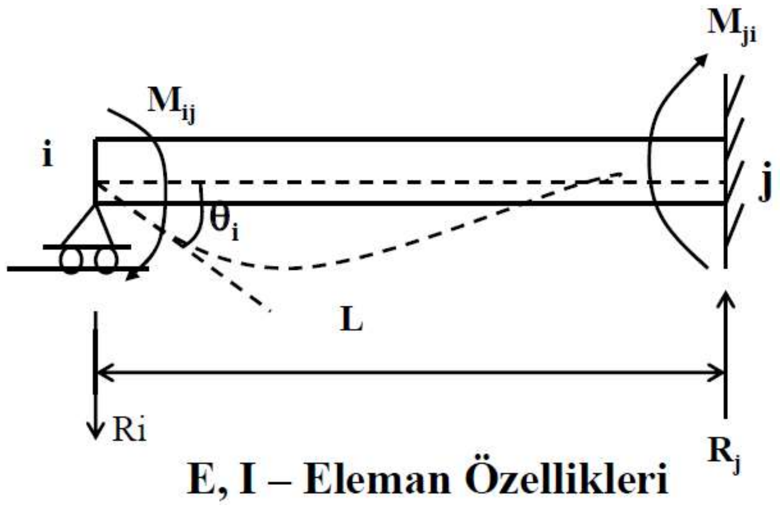
Birim dönmenin (θ_B =1) sağlanması için gerekli olan momente (M_{BA}) ***redör (R=4EJ/L)*** adı verilmektedir. E= sabit ise R=J/L olarak alınabilir.

Özetle;

Eleman prizmatik ise Cross yönteminde;

1. Ankastrelik momentleri yükleme durumuna ve açıklığa göre değişir.
2. Taşıma katsayısı iki uç momentin oranı olup, ½'dir.
3. Redör, J/L oranı, birim dönme meydana getirecek momenttir.

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L}\cdot\theta_i + \frac{2EI}{L}\cdot\theta_j + M_{ij}^F + M_{ij}^\Delta$$



Eleman Rijitlik Faktörü

i mafsallı kenar mesnet (yakın uç)
j ankastre mesnet (uzak uç) olmak üzere

i düğüm noktasında θ=1 radyan birim dönmesi yapabilecek momente "eleman rijitlik faktörü" denir.

$$M_{ij} = M_{ij}^F + \frac{2EI}{L}\cdot\left(2\cdot\theta_i + \theta_j - 3\Phi_{ij}\right) \Rightarrow$$

açı denkleminde θ=1 rad için:

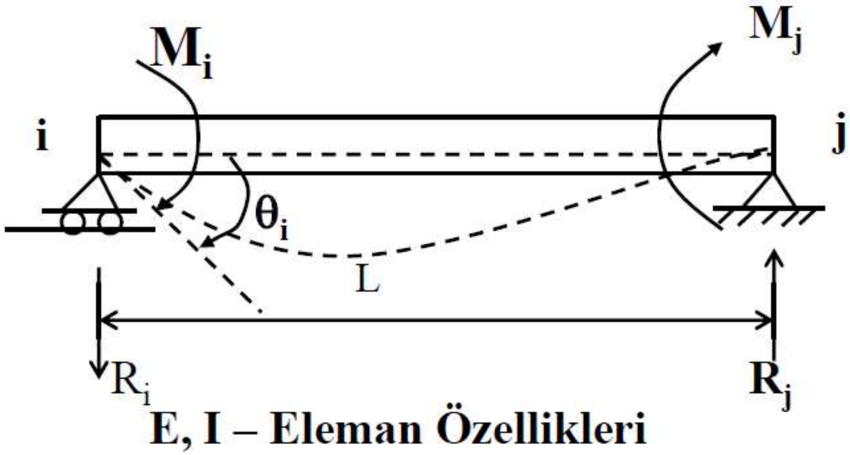
$$M_{ij} = 0 + \frac{2\cdot E\cdot I}{L}\cdot\left(2\cdot\theta_i + 0_j - 0\right) = \frac{4EI}{L}\cdot 1 = \frac{4EI}{L}$$

$$R = \frac{4EI}{L} \quad \rightarrow \quad mutlak\ rijitlik\ matrisi\ (Redör)$$

$$M_{ji} = \frac{1}{2}M_{ij} \quad \rightarrow \quad dağıtma\ momenti$$

$$k = \frac{I}{L} \quad \rightarrow \quad relatif\ rijitlik\ matrisi$$

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L} \cdot \theta_i + \frac{2EI}{L} \cdot \theta_j + M_{ij}^F + M_{ij}^\Delta$$



Eleman Rijitlik Faktörü

i mafsallı kenar mesnet (yakın uç)
j mafsallı kenar mesnet (uzak uç) olmak üzere

i düğüm noktasında θ=1 radyan birim dönmesi yapabilecek momente "eleman rijitlik faktörü" denir.

$$M_{ij} = 0 + 0.75 \cdot \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \left(2 \cdot \theta_i + 0_j - 0\right) = \frac{3EI}{L} \cdot 1 = \frac{3EI}{L}$$

$$M_{ji} = 0$$

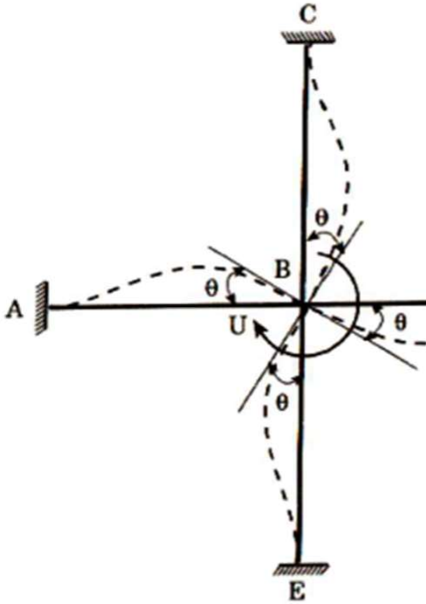
$$R = \frac{3EI}{L} \rightarrow \quad mutlak\ rijitlik\ matrisi\ (Redör)$$

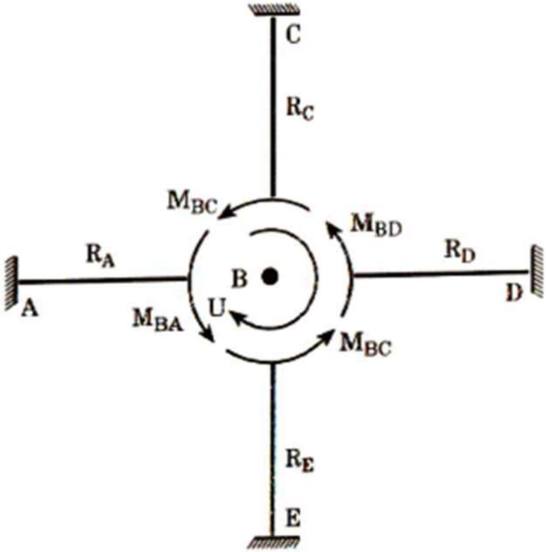
$$k = 0,75\frac{I}{L} \quad \rightarrow \quad relatif\ rijitlik\ matrisi$$

DURUMLAR:

- sol ucu rijit sağ ucu mafsallı çubuk
- sol ucu mafsallı sağ ucu rijit çubuk

BİR DÜĞÜM NOKTASINDAKİ MOMENTLERİN DAĞILIMI





B düğümünde denge denklemini (∑M=0) yazacak olursak;

BA Çubuğu için $$M_{BA} = -U\frac{R_A}{R_A + R_D + R_C + R_E}$$

BC Çubuğu için $$M_{BC} = -U\frac{R_C}{R_A + R_D + R_C + R_E}$$

BD Çubuğu için $$M_{BD} = -U\frac{R_D}{R_A + R_D + R_C + R_E}$$

BE Çubuğu için $$M_{BE} = -U\frac{R_E}{R_A + R_D + R_C + R_E}$$

Toplam $$= -U\frac{R_A + R_D + R_C + R_E}{R_A + R_D + R_C + R_E} = -U$$

B noktasına (düğümüne) bir U momenti uygulayalım. B düğümünde bir dönme meydana gelecektir. Dolayısıyla tüm çubuklarda eşit θ açısı oluşacaktır.

Düğümde birleşen tüm elemanlar U momentinden rijitlikleri oranında pay alacaktır. Çubuklardaki momentler dengeyi sağladığından dolayı, U momentinin aksi yönünde oluşacaklardır.

$$\frac{R}{\sum R}(-U) \Longrightarrow$$ Herhangi bir elemanda oluşacak momentin genel ifadesi

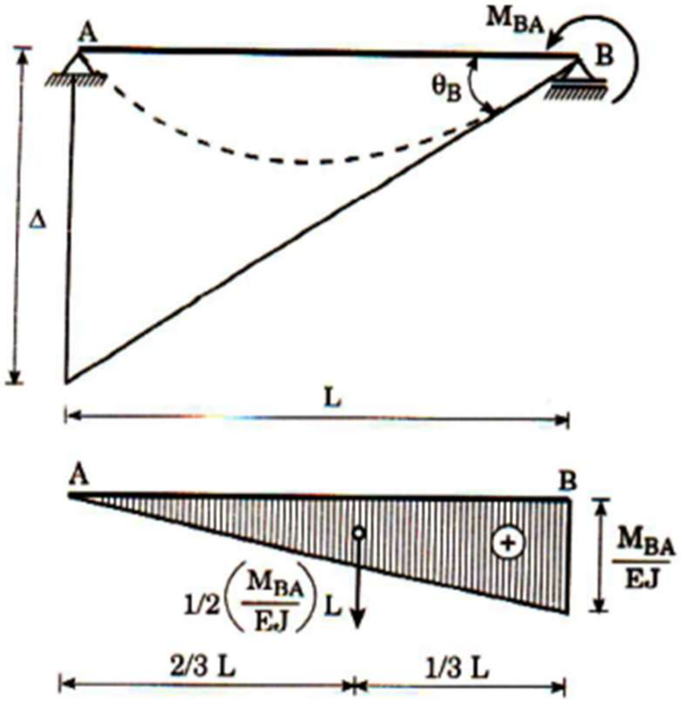
$$\frac{R}{\sum R} \Longrightarrow$$ ***Dağıtma katsayısı***

R $\longrightarrow$ eleman rijitliği (redör)

∑R $\longrightarrow$ dağıtılacak momentin bulunduğu düğüme saplanan çubukların toplam redörü

Kirişlerin Bir Ucu Serbest ve Bir Ucu Ankastre Olması Halinde Redör:

B noktasına M_{BA} momenti uygulanmıştır. Bu moment altında, kirişin yapacağı deformasyon kesik çizgiyle ifade edilmiştir. M_{BA} momenti B noktasında θ_B açısını oluşturmaktadır. İkinci moment alanı teoremini uygularsak A mesnedindeki Δ mesafesi:



Şekil-18.12

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{M_{BA}}{EJ}\right) L \left(\frac{2}{3} L\right) = \frac{M_{BA} L^2}{3EJ}$$

$$\mathrm{tg}\, \theta_B = \frac{\Delta}{L}$$

olduğuna göre küçük açıklıklar için

$$\theta_B = \frac{\Delta}{L} \text{ alınabilir.}$$

Yukarıdaki basitleştirme yapıldığında;

$$\theta_B = \frac{\Delta}{L} = \frac{M_{BA} L^2}{3EJL} = \frac{M_{BA} L}{3EJ} \quad \text{olur.}$$

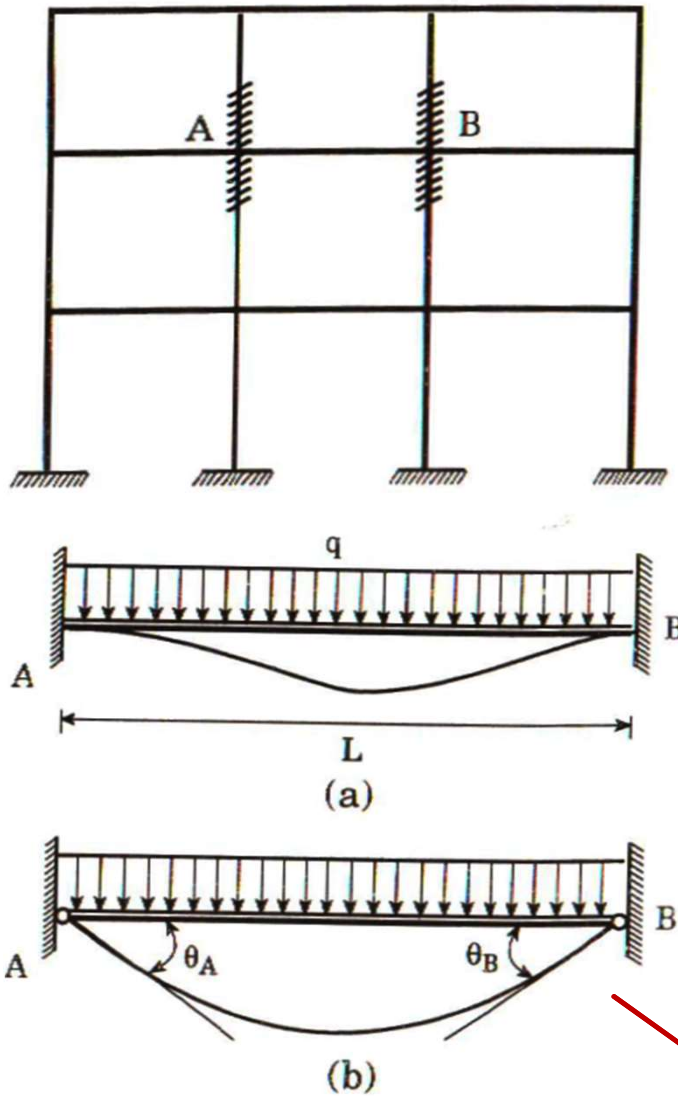
$$M_{BA} = \frac{3EJ\, \theta_B}{L} \quad \text{veya} \quad \frac{M_{BA}}{\theta_B} = \frac{3EJ}{L} \quad \text{olursa,}$$

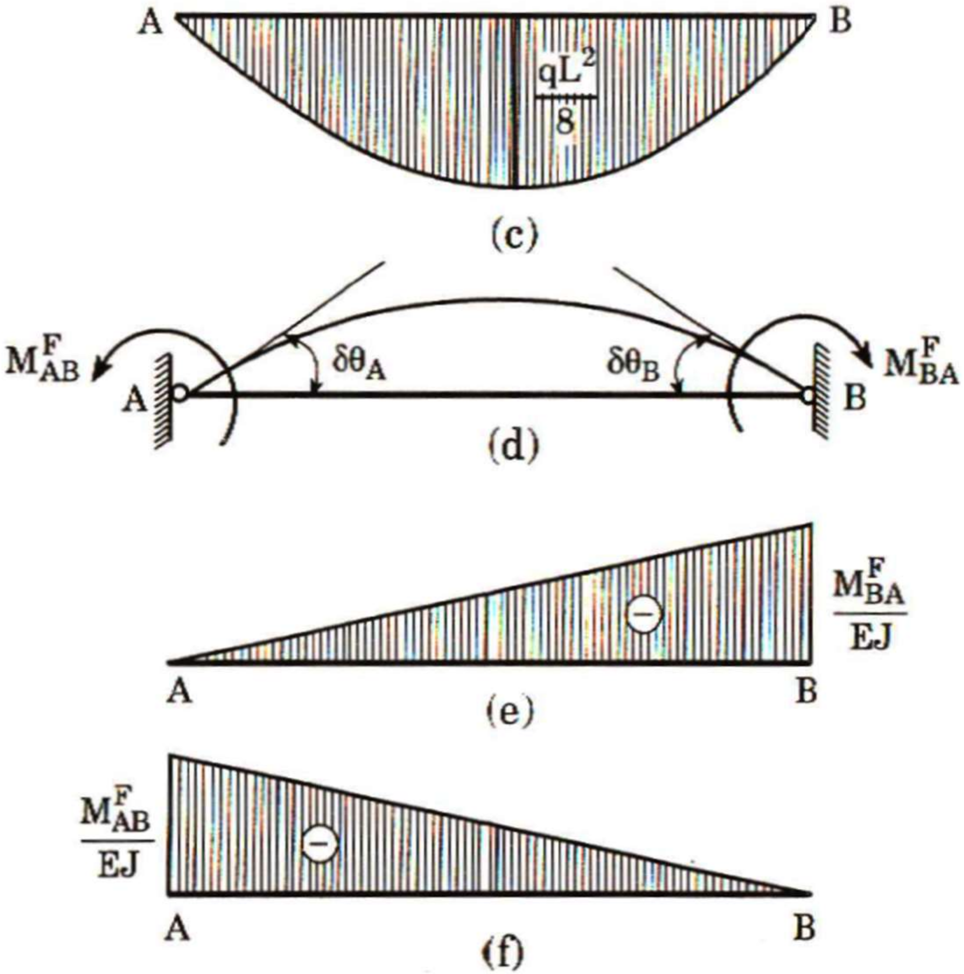
$$\theta_B = 1 \quad \text{için} \quad M_{BA} = \frac{3EJ}{L} \quad \text{veya} \quad R = \frac{3EJ}{L}$$

Cross Yönteminin Uygulanmasında İşlem Sırası:

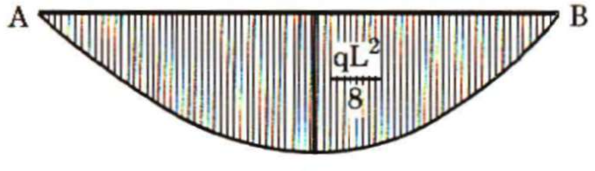
1. Sistemde dengelenecek düğüm noktaları saptanır.
   (Ankastre, sabit hareketli,pandül ve elastik ankastre mesnetler)
2. Sistemi oluşturan tüm elemanlar için, redörler dağıtma katsayıları ve moment taşıma katsayıları bulunur.
3. Sistemdeki düğüm noktaları dönmeye karşı kilitlenir (tutulur).
4. Sistemdeki elemanların tam ankastrelik momentleri bulunur.
5. Sistemde kilitlenen düğümlerden seçilen bir düğüm dönmeye karşı serbest bırakılır. O düğümde dengeyi bozan moment bulunur.
   (düğümde birleşen çubuklara ait momentlerin cebirsel toplamı)
6. Düğümde birleşen elemanlara, dağıtma katsayısı yardımıyla 5. maddede elde edilen moment dağıtılır.
7. 6. maddede bulunan moment, çubuk elemanların diğer ucuna taşıma katsayıları kullanılarak taşınır.
8. Düğüm denge sağlandıktan sonra, o düğüm tekrar kilitlenir. Başka bir düğüm seçilerek, seçilen düğüm dönmeye serbest bırakılır. Bu düğüm, 5., 6. ve 7. maddedeki işlemler tekrarlanır. Tüm düğümlerdeki birinci dengeleme sonuçlanıncaya kadar işlemlere devam edilir.
9. Birinci dengeleme turu sonunda, 5., 6., 7. ve 8. maddelerde yer alan işlemler yeniden tekrarlanır. Dengeyi bozan momentler sıfıra ininceye kadar (ya da ihmal edilebilecek sonuca yaklaşıncaya kadar) işlemlere devam edilir.
10. Her dengeleme turunun sonunda, düğümde birleşen elemanların uç momentleri cebirsel olarak toplanır ve sonuç momenti elde edilir.

ANKASTRELİK MOMENTLERİ:

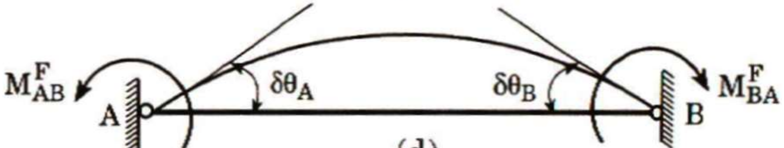




A ve B mesnetleri mafsallı kabul edersek elastik eğri şekildeki gibi olur.



(c)



(d)

(e)

(f)

θ_A ve θ_B açısı 1. moment teoremi kullanılarak bulunabilir:

$$\theta_A = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\,.\,L\,.\,\frac{qL^2}{8}\right)$$

$$\theta_A = \frac{qL^3}{24\,EJ} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{24\,EJ}$$

Kirişe A ve B mesnetlerinden M_{AB} ve M_{BA} momentleri uygulanırsa kirişte $\delta\theta_A$, $\delta\theta_B$ açıları oluşur. Bu açılar 1. moment teoremi kullanılarak bulunabilir:

$$\delta\theta_A = \frac{1}{2}\left(L\,.\,M^F_{AB}\right)\frac{1}{EJ}$$

$$\delta\theta_A = \frac{1}{2}\left(L\,.\,M^F_{BA}\right)\frac{1}{EJ}$$

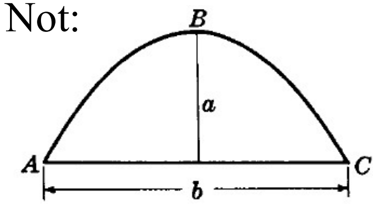
Ankastre mesnetli kirişlerde; kirişin A ve B mesnetlerinde açıların sıfıra eşit olacağı yazılırsa;

$$\theta_A - \delta\theta_A = 0$$

$$\theta_B - \delta\theta_B = 0$$

$$\frac{qL^3}{24\,EJ} = \frac{M^F_{AB}\,.\,L}{2\,EJ} \longrightarrow M^F_{AB} = \frac{qL^2}{12} \qquad M^F_{BA} = -\frac{qL^2}{12}$$

Not:

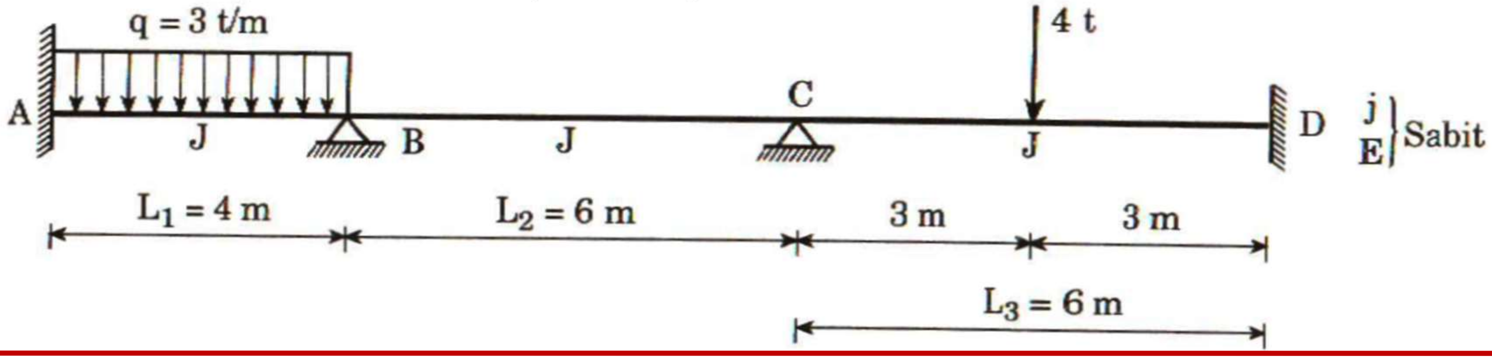


Parabol Alanı

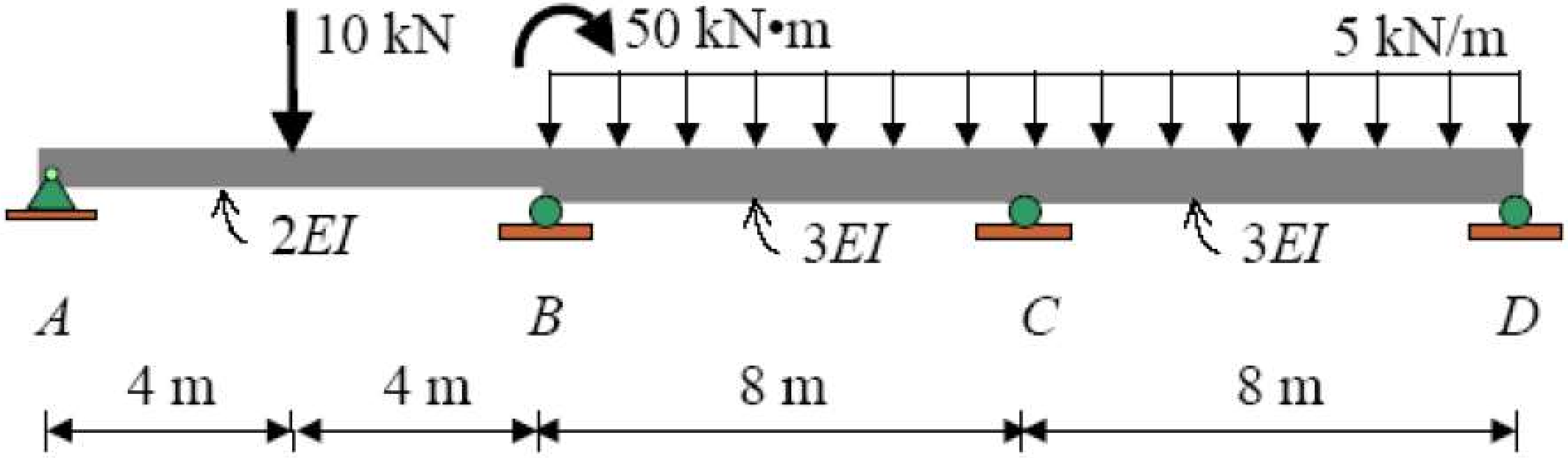
Alan=(2/3)ab

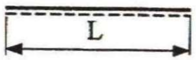
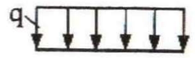
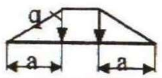
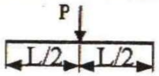
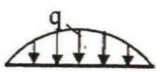
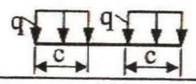
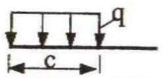
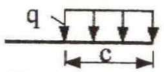
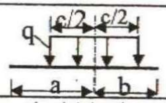
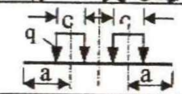
Burada düzgün yayılı yükle yüklenmiş iki ucu ankastre kiriş için moment hesabı yapıldı. Diğer durumlar için ankastrelik momentler çizelgelerden elde edilebilir.

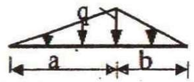
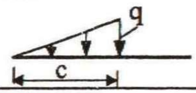
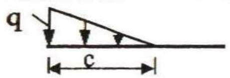
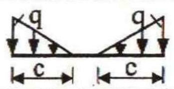
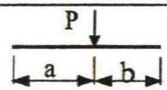
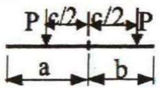
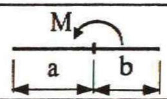
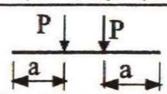
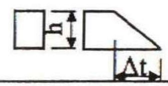
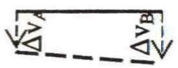
Örnek: Şekilde yükleme durumu verilen üç açıklıklı sürekli kirişin mesnetlerinde oluşan moment değerlerini Cross yöntemiyle bulunuz.



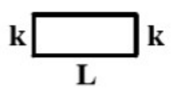
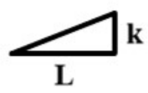
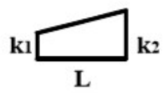
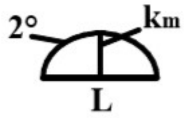
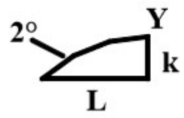
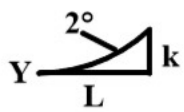
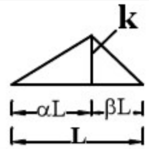
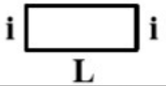
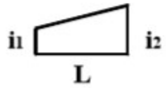
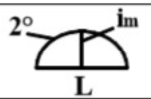
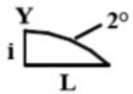
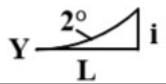
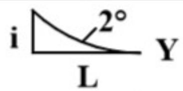
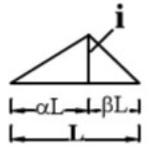
Örnek: Şekilde yükleme durumu verilen üç açıklıklı sürekli kirişin mesnet tepkilerini hesaplayınız. Moment ve kesme kuvveti diyagramlarını çiziniz.



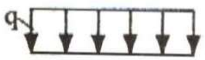
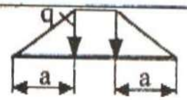
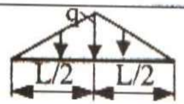
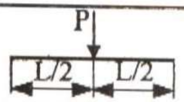
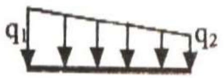
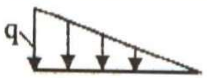
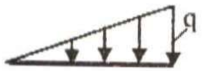
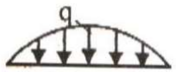
		YÜK TERİMLERİ  $\varphi_A = \frac{L}{6EI}\mathcal{L}$ $\varphi_B = \frac{L}{6EI}\mathcal{R}$ $\alpha = a/L$ $\beta = b/L$ $\gamma = c/L$	
	Yük Şekli	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$
1		$\frac{qL^2}{4}$	$\frac{qL^2}{4}$
2		$\frac{qL^2}{4}\left[1-\alpha^2(2-\alpha)\right]$	$\frac{qL^2}{4}\left[1-\alpha^2(2-\alpha)\right]$
3		$\frac{5}{32}qL^2$	$\frac{5}{32}qL^2$
4		$\frac{3}{8}PL$	$\frac{3}{8}PL$
5		$\frac{L^2}{60}(8q_1+7q_2)$	$\frac{L^2}{60}(7q_1+8q_2)$
6		$\frac{8}{60}qL^2$	$\frac{7}{60}qL^2$
7		$\frac{7}{60}qL^2$	$\frac{8}{60}qL^2$
8		$\frac{1}{5}qL^2$	$\frac{1}{5}qL^2$
9		$\frac{qc^2}{2}(3-2\gamma)$	$\frac{qc^2}{2}(3-2\gamma)$
10		$\frac{qc^2}{4}(2-\gamma)^2$	$\frac{qc^2}{4}(2-\gamma^2)$
11		$\frac{qc^2}{4}(2-\gamma^2)$	$\frac{qc^2}{4}(2-\gamma)^2$
12		$qbc(1-\beta^2-\frac{\gamma^2}{4})$	$qac(1-\alpha^2-\frac{\gamma^2}{4})$
13		$qLc\left[3\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{4}\right]$	$qLc\left[3\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{4}\right]$

		YÜK TERİMLERİ  $\varphi_A = \frac{L}{6EI}\mathcal{L}$ $\varphi_B = \frac{L}{6EI}\mathcal{R}$ $\alpha = a/L$ $\beta = b/L$ $\gamma = c/L$	
	Yük Şekli	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$
14		$\frac{qL^2}{60}(1+\beta)(7-3\beta^2)$	$\frac{qL^2}{60}(1+\alpha)(7-3\alpha^2)$
15		$\frac{qc^2}{3}(2-2{,}25\gamma+0{,}6\gamma^2)$	$\frac{qc^2}{3}(1-0{,}6\gamma^2)$
16		$\frac{qc^2}{3}(1-0{,}75\gamma+0{,}15\gamma^2)$	$\frac{qc^2}{6}(1-0{,}3\gamma^2)$
17		$\frac{qc^2}{4}(2-\gamma)$	$\frac{qc^2}{4}(2-\gamma)$
18		$Pa\beta(1+\beta)$	$Pb\alpha(1+\alpha)$
19		$2Pb(1-\beta^2-0{,}75\gamma^2)$	$2Pa(1-\alpha^2-0{,}75\gamma^2)$
20		$M(1-3\beta^2)$	$M(3\alpha^2-1)$
21		$3Pa(1-\alpha)$	$3Pa(1-\alpha)$
22		$3EI\frac{\alpha_t \Delta t}{h}$	$3EI\frac{\alpha_t \Delta t}{h}$
23		$\frac{6EI}{L^2}(\Delta v_B-\Delta v_A)$	$-\frac{6EI}{L^2}(\Delta v_B-\Delta v_A)$

ÇARPIM TABLOSU ($\int_0^L M_i . M_k \; ds$)

M_k \ M_i							
	$L\,i\,k$	$\frac{1}{2}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{2}\,L\,i\,(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}\,L\,i\,k_m$	$\frac{2}{3}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{3}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{2}\,L\,i\,k$
	$\frac{1}{2}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{3}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,i\,(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}\,L\,i\,k_m$	$\frac{5}{12}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{4}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,(1+\alpha)\,i\,k$
	$\frac{1}{2}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,i\,(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}\,L\,i\,k_m$	$\frac{1}{4}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,(1+\beta)\,i\,k$
	$\frac{1}{2}\,L\,(i_1+i_2)\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,(i_1+2i_2)\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}\,L\,(i_1+i_2)\,k_m$	$\frac{1}{12}\,L\,(3i_1+5i_2)\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,(i_1+3i_2)\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,k\,[(1+\beta)\,i_1+(1+\alpha)\,i_2]$
	$\frac{2}{3}\,L\,i_m\,k$	$\frac{1}{3}\,L\,i_m\,k$	$\frac{1}{3}\,L\,i_m\,(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}\,L\,i_m\,k_m$	$\frac{7}{15}\,L\,i_m\,k$	$\frac{1}{5}\,L\,i_m\,k$	$\frac{1}{3}\,L\,(1+\alpha\,\beta)\,i_m\,k$
	$\frac{2}{3}\,L\,i\,k$	$\frac{5}{12}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,i\,(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}\,L\,i\,k_m$	$\frac{8}{15}\,L\,i\,k$	$\frac{3}{10}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,(5-\beta-\beta^2)\,i\,k$
	$\frac{2}{3}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{4}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,i\,(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}\,L\,i\,k_m$	$\frac{11}{30}\,L\,i\,k$	$\frac{2}{15}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,(5-\alpha-\alpha^2)\,i\,k$
	$\frac{1}{3}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{4}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,i\,(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}\,L\,i\,k_m$	$\frac{3}{10}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{5}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,(1+\alpha+\alpha^2)\,i\,k$
	$\frac{1}{3}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,i\,(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}\,L\,i\,k_m$	$\frac{2}{15}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{30}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,(1+\beta+\beta^2)\,i\,k$
	$\frac{1}{2}\,L\,i\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,(1+\alpha)\,i\,k$	$\frac{1}{6}\,L\,i\,[(1+\beta)\,k_1+(1+\alpha)\,k_2]$	$\frac{1}{3}\,L\,(1+\alpha\,\beta)\,i\,k_m$	$\frac{1}{12}\,L\,(5-\beta-\beta^2)\,i\,k$	$\frac{1}{12}\,L\,(1+\alpha+\alpha^2)\,i\,k$	$\frac{1}{3}\,L\,i\,k$

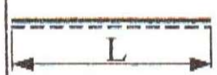
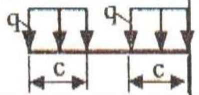
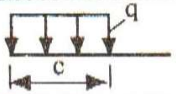
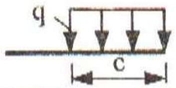
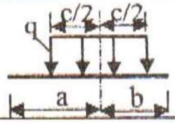
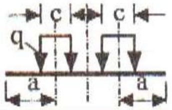
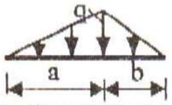
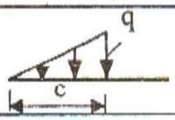
Y harfi bulunan uclarda teğetler yataydır.

		ÇİZELGE 2.4.1 ANKASTRELİK UÇ MOMENTLERİ			
					
	Yük Şekli	$\mathcal{M}_A$	$\mathcal{M}_B$	$\overline{\mathcal{M}}_A$	$\overline{\mathcal{M}}_B$
1		$-\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{8}$	$-\frac{qL^2}{8}$
2		$-\frac{qL^2}{12}\left[1-\alpha^2(2-\alpha)\right]$	$-\frac{qL^2}{12}\left[1-\alpha^2(2-\alpha)\right]$	$-\frac{qL^2}{8}\left[1-\alpha^2(2-\alpha)\right]$	$-\frac{qL^2}{8}\left[1-\alpha^2(2-\alpha)\right]$
3		$-\frac{5}{96}qL^2$	$-\frac{5}{96}qL^2$	$-\frac{5}{64}qL^2$	$-\frac{5}{64}qL^2$
4		$-\frac{1}{8}PL$	$-\frac{1}{8}PL$	$-\frac{3}{16}PL$	$-\frac{3}{16}PL$
5		$-\frac{L^2}{60}(3q_1+2q_2)$	$-\frac{L^2}{60}(2q_1+3q_2)$	$-\frac{L^2}{120}(8q_1+7q_2)$	$-\frac{L^2}{120}(7q_1+8q_2)$
6		$-\frac{1}{20}qL^2$	$-\frac{1}{30}qL^2$	$-\frac{1}{15}qL^2$	$-\frac{7}{120}qL^2$
7		$-\frac{1}{30}qL^2$	$-\frac{1}{20}qL^2$	$-\frac{7}{120}qL^2$	$-\frac{1}{15}qL^2$
8		$-\frac{1}{15}qL^2$	$-\frac{1}{15}qL^2$	$-\frac{1}{10}qL^2$	$-\frac{1}{10}qL^2$

$\alpha = a/L,\quad \beta = b/L,$
$\gamma = c/L$

Çizelgedeki pozitif yönler 

Cross ve Açı yöntemi pozitif yönleri 

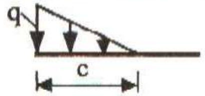
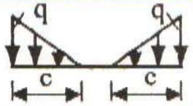
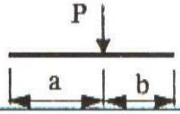
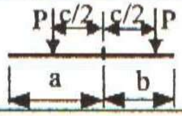
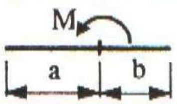
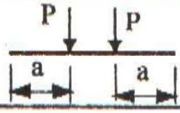
		ÇİZELGE 2.4.1 DEVAMI ANKASTRELİK UÇ MOMENTLERİ			
					
	Yük Şekli	$\mathcal{M}_A$	$\mathcal{M}_B$	$\overline{\mathcal{M}}_A$	$\overline{\mathcal{M}}_B$
9		$-\frac{qc^2}{6}(3-2\gamma)$	$-\frac{qc^2}{6}(3-2\gamma)$	$-\frac{qc^2}{4}(3-2\gamma)$	$-\frac{qc^2}{4}(3-2\gamma)$
10		$-\frac{qc^2}{3}(1{,}5-2\gamma+0{,}75\gamma^2)$	$-\frac{qc^2}{3}\gamma(1-0{,}75\gamma)$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma)^2$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma^2)$
11		$-\frac{qc^2}{3}\gamma(1-0{,}75\gamma)$	$-\frac{qc^2}{3}(1{,}5-2\gamma+0{,}75\gamma^2)$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma^2)$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma)^2$
12		$-qc\left[a\beta^2+\frac{\gamma^2}{12}(L-3b)\right]$	$-qc\left[b\alpha^2+\frac{\gamma^2}{12}(L-3a)\right]$	$-\frac{qbc}{2}(1-\beta^2-0{,}25\gamma^2)$	$-\frac{qac}{2}(1-\alpha^2-0{,}25\gamma^2)$
13		$-qLc\left[\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{12}\right]$	$-qLc\left[\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{12}\right]$	$-\frac{qLc}{2}\left[3\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{4}\right]$	$-\frac{qLc}{2}\left[3\alpha(1-\alpha)-\frac{\gamma^2}{4}\right]$
14		$-\frac{qL^2}{30}\left[1+\beta+\beta^2-\frac{3\beta^3}{2}\right]$	$-\frac{qL^2}{30}\left[1+\alpha+\alpha^2-\frac{3\alpha^3}{2}\right]$	$-\frac{qL^2}{120}(1+\beta)(7-3\beta^2)$	$-\frac{qL^2}{120}(1+\alpha)(7-3\alpha^2)$
15		$-\frac{qc^2}{3}\left[1-1{,}5\gamma+0{,}60\gamma^2\right]$	$-\frac{qc^2}{4}\gamma(1-0{,}8\gamma)$	$-\frac{qc^2}{6}\left[2-2{,}25\gamma+0{,}60\gamma^2\right]$	$-\frac{qc^2}{6}(1-0{,}6\gamma^2)$

$\alpha = a/L$, $\beta = b/L$, $\gamma = c/L$

Çizelgedeki pozitif yönler 

Cross ve Açı yöntemi pozitif yönleri 

ÇİZELGE 2.4.1 DEVAMI ANKASTRELİK UÇ MOMENTLERİ

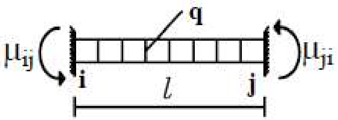
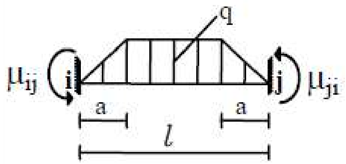
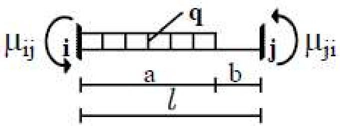
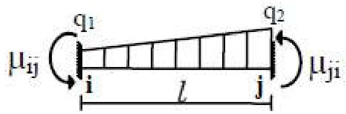
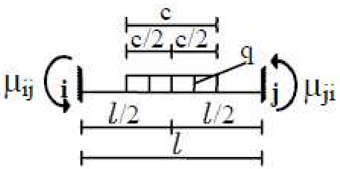
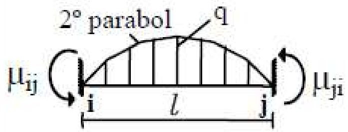
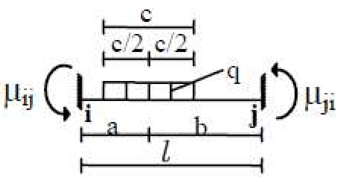
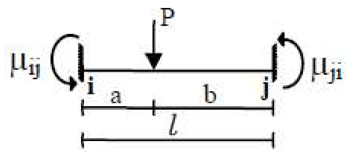
					
	Yük Şekli	$\mathcal{M}_A$	$\mathcal{M}_B$	$\overline{\mathcal{M}}_A$	$\overline{\mathcal{M}}_B$
16		$-\frac{qc^2}{6}\left[1-\gamma+0,3\gamma^2\right]$	$-\frac{qc^2}{12}\gamma(1-0,6\gamma)$	$-\frac{qc^2}{6}\left[1-0,75\gamma+0,15\gamma^2\right]$	$-\frac{qc^2}{12}(1-0,3\gamma^2)$
17		$-\frac{qc^2}{12}(2-\gamma)$	$-\frac{qc^2}{12}(2-\gamma)$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma)$	$-\frac{qc^2}{8}(2-\gamma)$
18		$-Pa\beta^2$	$-Pb\alpha^2$	$-\frac{1}{2}Pa\beta(1+\beta)$	$-\frac{1}{2}Pb\alpha(1+\alpha)$
19		$-P(2a\beta^2+\frac{a\gamma^2}{2}-b\gamma^2)$	$-P(2b\alpha^2+\frac{b\gamma^2}{2}-a\gamma^2)$	$-Pb(1-\beta^2-0,75\gamma^2)$	$-Pb(1-\alpha^2-0,75\gamma^2)$
20		$-M\beta(3\alpha-1)$	$-M\alpha(1-3\beta)$	$-\frac{M}{2}(1-3\beta^2)$	$-\frac{M}{2}(3\alpha^2-1)$
21		$-Pa(1-\alpha)$	$-Pa(1-\alpha)$	$-\frac{3}{2}Pa(1-\alpha)$	$-\frac{3}{2}Pa(1-\alpha)$
22		$-EI\frac{\alpha_t\Delta t}{h}$	$-EI\frac{\alpha_t\Delta t}{h}$	$-\frac{3}{2}EI\frac{\alpha_t\Delta t}{h}$	$-\frac{3}{2}EI\frac{\alpha_t\Delta t}{h}$
23		$-\frac{6EI}{L^2}(\Delta B-\Delta A)$	$\frac{6EI}{L^2}(\Delta B-\Delta A)$	$-\frac{3EI}{L^2}(\Delta B-\Delta A)$	$\frac{3EI}{L^2}(\Delta B-\Delta A)$

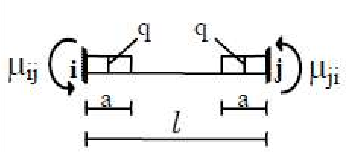
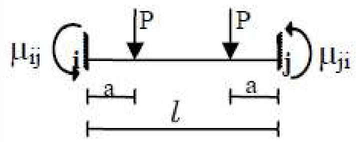
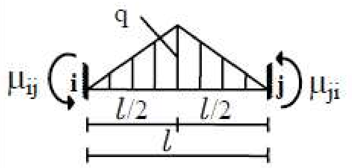
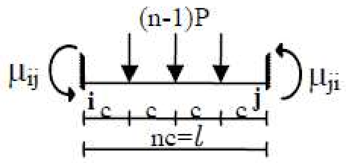
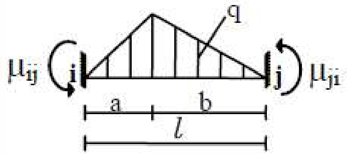
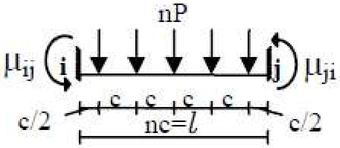
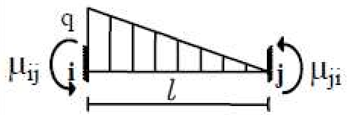
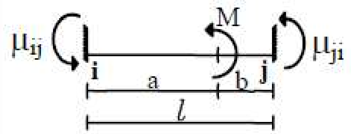
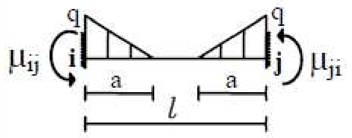
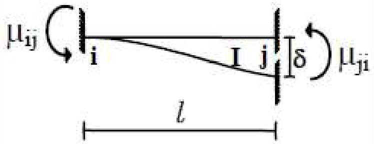
$\alpha = a/L$, $\beta = b/L$, $\gamma = c/L$

Çizelgedeki pozitif yönler 

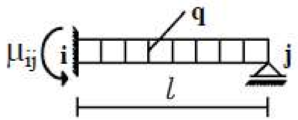
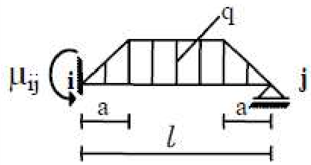
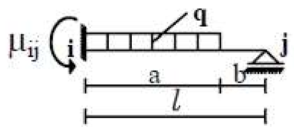
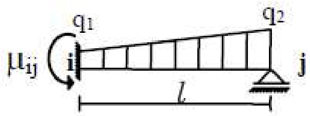
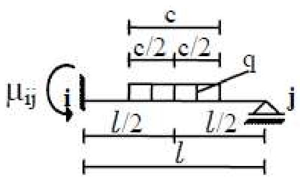
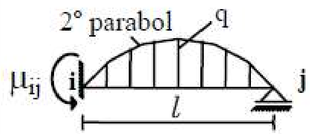
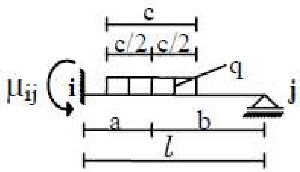
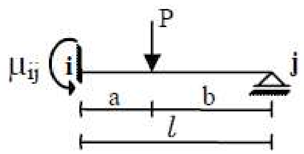
Cross ve Açı yöntemi pozitif yönleri 

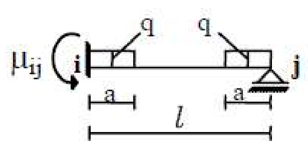
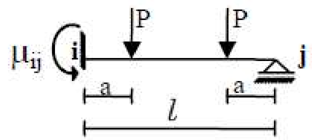
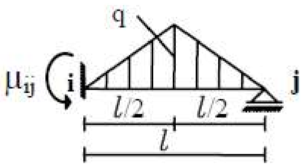
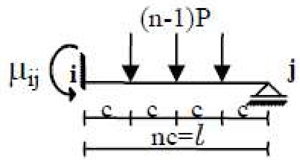
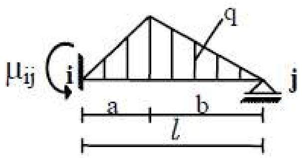
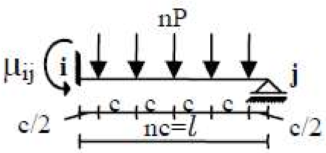
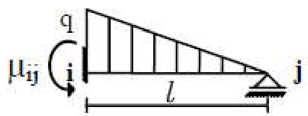
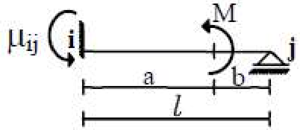
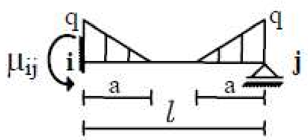
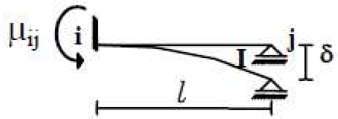
ANKASTRELİK MOMENTLERİ TABLOSU

Yük	Ankastrelik Momentleri	Yük	Ankastrelik Momentleri
	$\mu_{ij}=\dfrac{ql^2}{12}$ $\mu_{ji}=-\dfrac{ql^2}{12}$		$\mu_{ij}=\dfrac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\dfrac{a}{l}\right)\right]$ $\mu_{ji}=-\dfrac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\dfrac{a}{l}\right)\right]$
	$\mu_{ij}=\dfrac{qa^2}{4}\left[2-\dfrac{a}{l}\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{a}{l}\right)\right]$ $\mu_{ji}=-\dfrac{qa^3}{12l^2}(4l-3a)$		$\mu_{ij}=\dfrac{l^2}{60}(3q_1+2q_2)$ $\mu_{ji}=-\dfrac{l^2}{60}(2q_1+3q_2)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{qc}{24l}(3l^2-c^2)$ $\mu_{ji}=-\dfrac{qc}{24l}(3l^2-c^2)$		$\mu_{ij}=\dfrac{ql^2}{15}$ $\mu_{ji}=-\dfrac{ql^2}{15}$
	$\mu_{ij}=\dfrac{qc}{12l^2}\left[(4l^2-c^2)(2b-a)-4(2b^3-a^3)\right]$ $\mu_{ji}=-\dfrac{qc}{12l^2}\left[(4l^2-c^2)(2a-b)-4(2a^3-b^3)\right]$		$\mu_{ij}=Pa\dfrac{b^2}{l^2}$ $\quad\mu_{ji}=-Pb\dfrac{a^2}{l^2}$ Özel hal: $a=b=\dfrac{l}{2}$, $\mu_{ij}=\dfrac{Pl}{8}$, $\mu_{ji}=-\dfrac{Pl}{8}$

	$\mu_{ij}=\dfrac{qa^2}{6l}(3l-2a)$ $\mu_{ji}=-\dfrac{qa^2}{6l}(3l-2a)$		$\mu_{ij}=\dfrac{Pa}{l}(l-a)$ $\mu_{ji}=-\dfrac{Pa}{l}(l-a)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{5}{96}ql^2$ $\mu_{ji}=-\dfrac{5}{96}ql^2$		$\mu_{ij}=\dfrac{Pl}{12}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)$ $\mu_{ji}=-\dfrac{Pl}{12}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{q}{180l}\left[7l^3-7l^2(a-2b)+3l\left(a^2-2b^2\right)+3\left(a^3-2b^3\right)\right]$ $\mu_{ji}=-\dfrac{q}{180l}\left[7l^3+7l^2(2b-a)-3l\left(2a^2-b^2\right)-3\left(2a^3-b^3\right)\right]$		$\mu_{ij}=\dfrac{Pl}{12}\left(n+\dfrac{1}{2n}\right)$ $\mu_{ji}=-\dfrac{Pl}{12}\left(n+\dfrac{1}{2n}\right)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{ql^2}{20}$ $\mu_{ji}=-\dfrac{ql^2}{30}$		$\mu_{ij}=M\dfrac{a}{l}\left(4-3\dfrac{a}{l}-\dfrac{l}{a}\right)$ $\mu_{ji}=-M\dfrac{a}{l}\left(3\dfrac{a}{l}-2\right)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{qa^2}{12l}(2l-a)$ $\mu_{ji}=-\dfrac{qa^2}{12l}(2l-a)$		$\mu_{ij}=\dfrac{6EI}{l^2}\delta$ $\mu_{ji}=\dfrac{6EI}{l^2}\delta$

ANKASTRELİK MOMENTLERİ TABLOSU

Yük	Ankastrelik Momentleri	Yük	Ankastrelik Momentleri
	$\mu_{ij}=\dfrac{ql^2}{8}$		$\mu_{ij}=\dfrac{q}{8}\left[l^2-a^2\left(2-\dfrac{a}{l}\right)\right]$
	$\mu_{ij}=\dfrac{qa^2}{8}\left(2-\dfrac{a}{l}\right)^2$		$\mu_{ij}=\dfrac{l^2}{120}(8q_1+7q_2)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{qc}{16l}\left(3l^2-c^2\right)$		$\mu_{ij}=\dfrac{ql^2}{10}$
	$\mu_{ij}=\dfrac{qbc}{8l^2}\left[4\left(l^2-b^2\right)-c^2\right]$		$\mu_{ij}=\dfrac{Pab(b+l)}{2l^2}$ Özel hal: $a=b=\dfrac{l}{2}$, $\mu_{ij}=\dfrac{3}{16}Pl$

	$\mu_{ij}=\dfrac{qa^2}{4l}(3l-2a)$		$\mu_{ij}=\dfrac{3}{2}Pa\left(1-\dfrac{a}{l}\right)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{5}{64}ql^2$		$\mu_{ij}=\dfrac{Pl}{8}\left(n-\dfrac{1}{n}\right)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{ql}{120}(l+b)\left(7-3\dfrac{b^2}{l^2}\right)$		$\mu_{ij}=\dfrac{Pl}{8}\left(n+\dfrac{1}{2n}\right)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{ql^2}{15}$		$\mu_{ij}=M\dfrac{a}{l}\left(3-\dfrac{3}{2}\dfrac{a}{l}-\dfrac{l}{a}\right)$
	$\mu_{ij}=\dfrac{qa^2}{8l}(2l-a)$		$\mu_{ij}=\dfrac{3EI}{l^2}\delta$

"i" ucu mafsallı, "j" ucu ankastre mesnet olması durumunda μ_{ij}=0 olur. μ_{ji} ler ise "a" ankastre mesnetten olan uzaklığı göstermek üzere, yukarıdaki formüllerle bulunan değerlerin negatif işaretlisine eşittir.