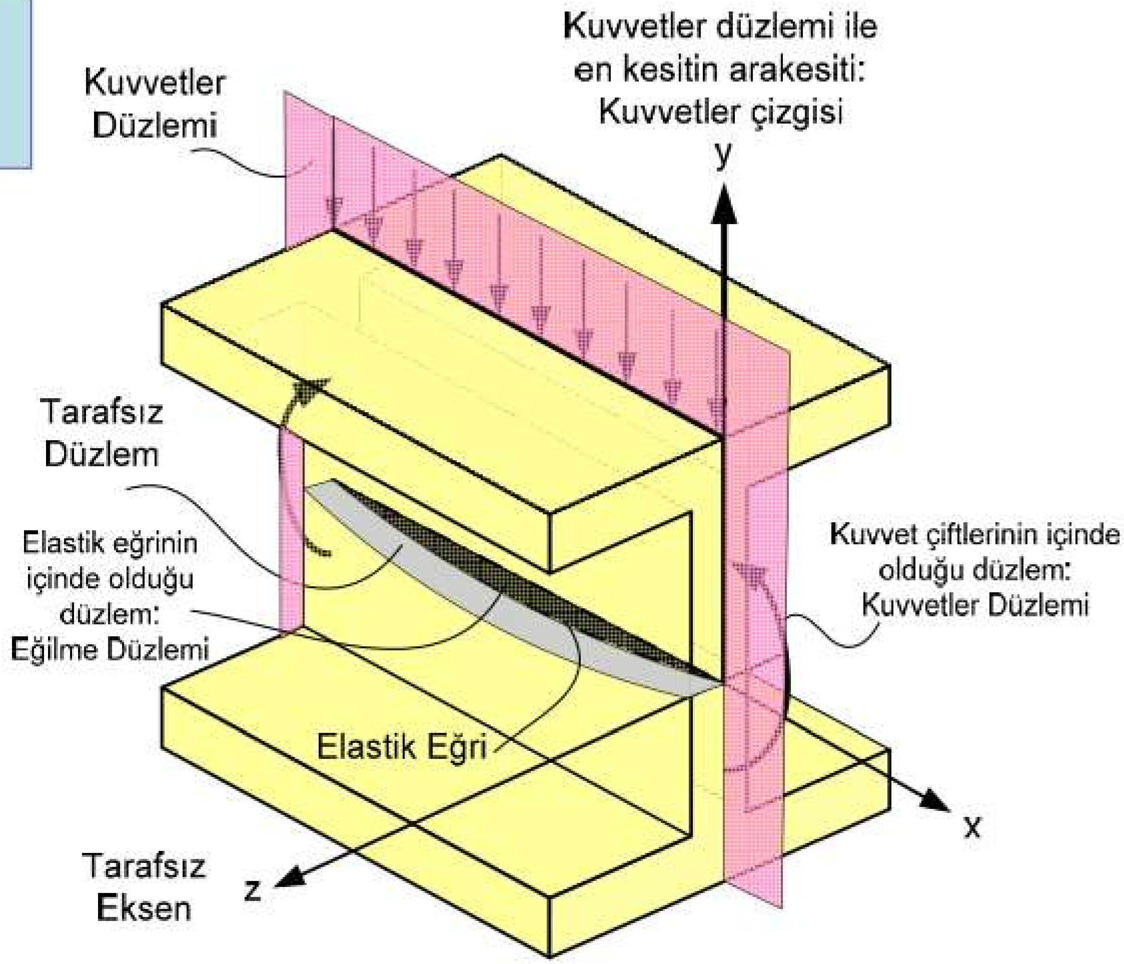
MUKAVEMET II
BASİT EĞİLME

Dr.Öğretim Üyesi Kıvanç TAŞKIN

EĞİLME TANIMLAR

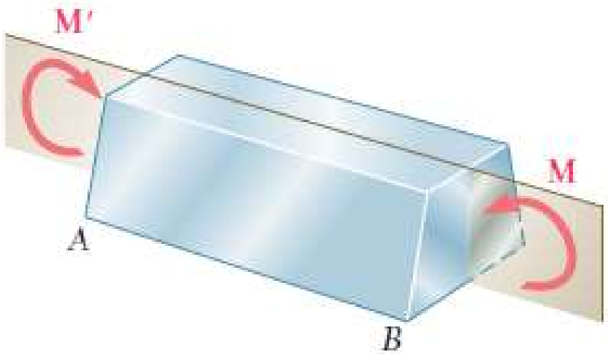
EĞİLME
Tanımlar



GİRİŞ

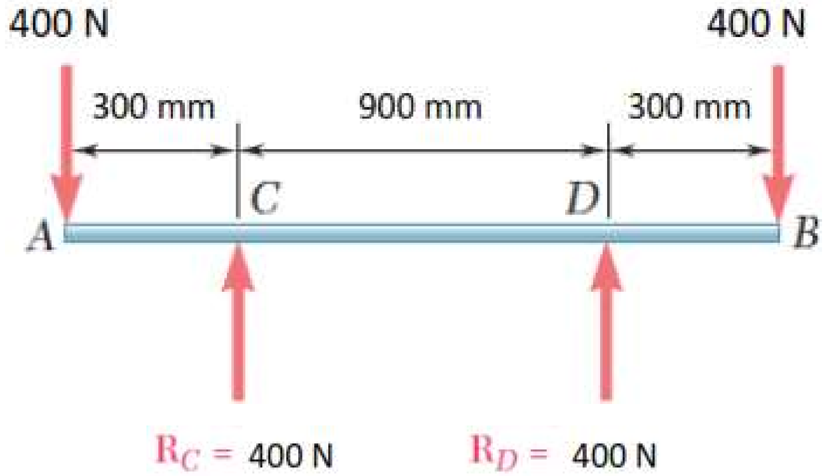
Bu bölümde, eğilmeye maruz prizmatik elemanlardaki gerilmeler ve şekil değiştirmeler incelenecektir. Eğilme, kiriş ve profil (I-beam) gibi yapı elemanlarının tasarımında kullanılan bir ana kavramdır.

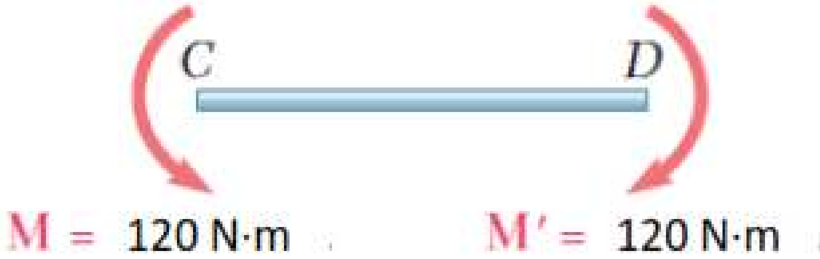
Cismin, herhangi bir kesitinde dış kuvvetlerin etkisi yalnız eğilme momentinden ibaretse veya diğer zorlama çeşitleri ihmal edilebilecek kadar az ise buna mukavemette ……………………hali denir.

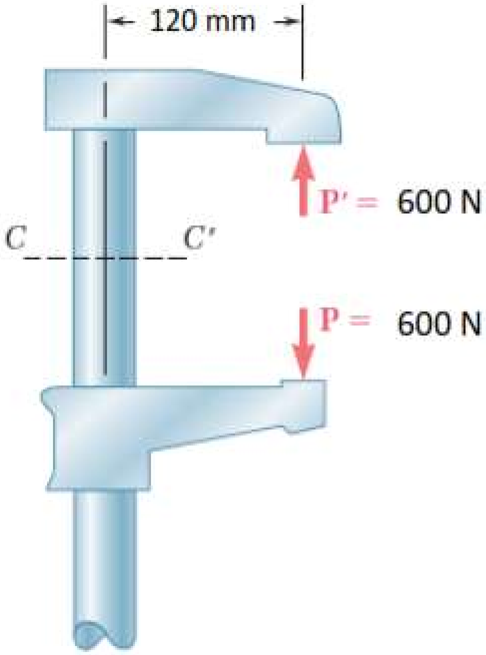


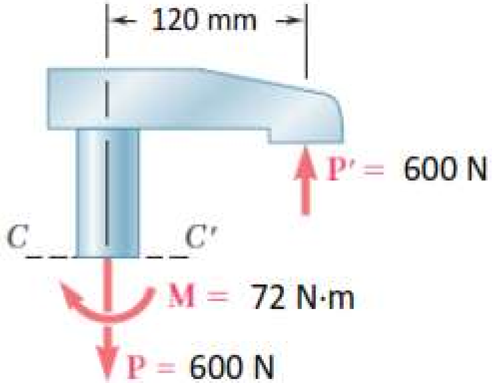
Eşit ve zıt yönlü M ve M' kuvvet çiftleri aynı boyuna düzlemde etki etmektedir. Bu nedenle prizmatik eleman basit eğilmeye maruzdur.


Pure Bending


400 N
400 N
300 mm
900 mm
300 mm
A
C
D
B
R_C = 400 N
R_D = 400 N


C
D
M = 120 N·m
M′ = 120 N·m

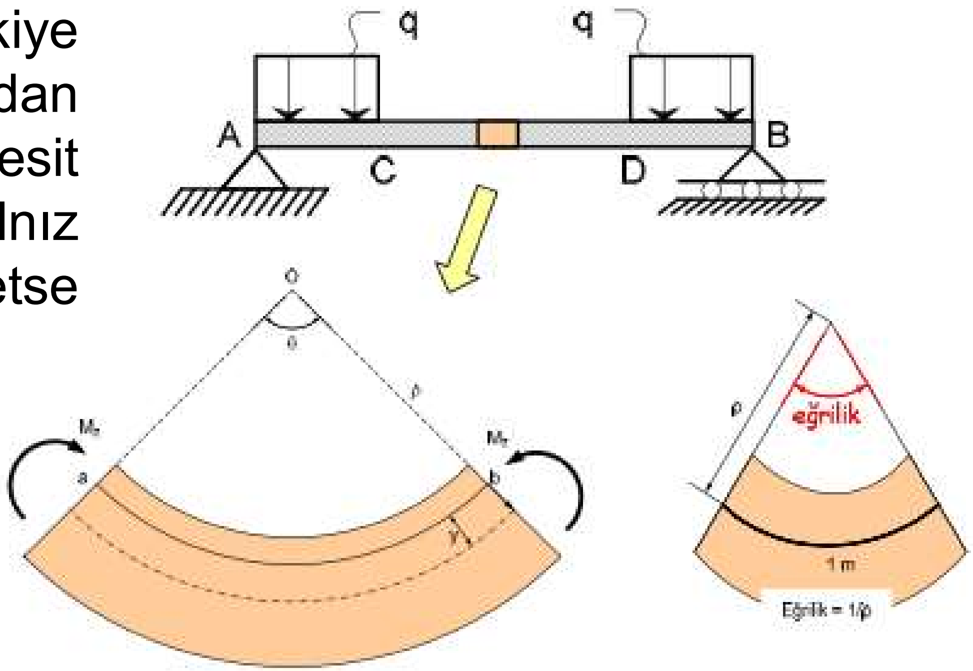




Mengenenin orta kısmı, dış merkezli yüklenir.

ELASTİK EĞRİ

Cismi, bir kesitle ikiye böldüğümüz takdirde parçalardan birini dengede tutacak etki kesit ağırlık merkezine tesir eden yalnız bir eğilme momentinden ibaretse basit eğilme hali mevcuttur.



Şekildeki simetrik yükle yüklenmiş basit mesnetli kirişte C, D aralığında kiriş basit eğilmeye zorlanmaktadır.

A-C ve D-B aralıklarında ise kirişin kesitlerine kesme kuvveti de tesir ettiğinden bu aralıklarda basit eğilme hali mevcut olmayıp genel eğilme hali mevcuttur.

Basit Eğilmeye zorlanan bir kesitteki gerilmeler bir kuvvet çifti verecek şekilde dağılırlar.

Bu kuvvet çiftinin düzlemi atılan parçaya tesir eden dış kuvvetlerin oluşturduğu kuvvet çiftinin düzlemiyle aynıdır.

Kesitteki gerilmeleri hesaplayabilmek için çubuğun deformasyonunu (Şekil değiştirmesini) göz önüne almak icap eder.

Basit eğilmeye zorlanan bir çubukta, alt taraftaki lifler uzarken üst taraftaki lifler kısalır.

Eksendeki liflerde aynı boyda kalmıştır. O halde aşağıdaki lifler uzadığına göre bu lifler çekme gerilmesine yukarıdaki liflerde kısaldığına göre basma gerilmelerine maruz kalmaktadır.

Eğilmeden sonra çubuğun ekseni bir eğri halini alır.

Bu eğriye ……………………denir.

Eğilmeden önce çubuk eksenine dik bir düzlem kesit içinde bulunan noktalar eğilmeden sonra gene çubuk eksenine (Elastik Eğri) dik bir düzlem içinde kalmak üzere en kesit düzlemi biraz döner. Yani eğilmeden önce paralel olan düzlemler eğilme sonucu aralarında açı yaparlar. Eğilmede bu hipotezi Bernoulli bulmuş ve Navier'de düzenlemiştir.

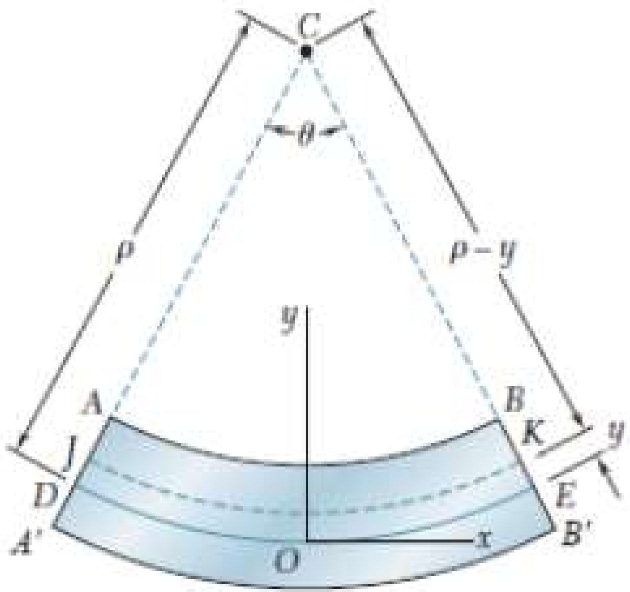
Bu hipoteze göre:

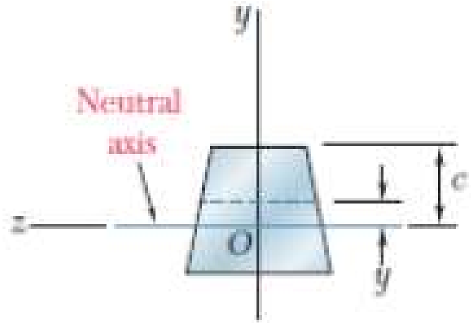
1. Çubuk eksenine dik düzlem kesitler eğilme neticesinde gene düzlem kalırlar.
2. Çubuk eksenine dik kesitler şekil değiştirmeden sonra da şekil değiştirmiş eksene dik kalırlar.

Ayrıca aşağıdaki hususlarda kabul edilir.

1. Kiriş (çubuk) malzemesi homojen olup Hooke kanununa uymaktadır.
2. Çekme ve basmada elastiklik modülü birbirine eşittir.
3. Eğilmeden önce kiriş ekseni doğru olup enkesit sabittir.

Tarafsız Eksen



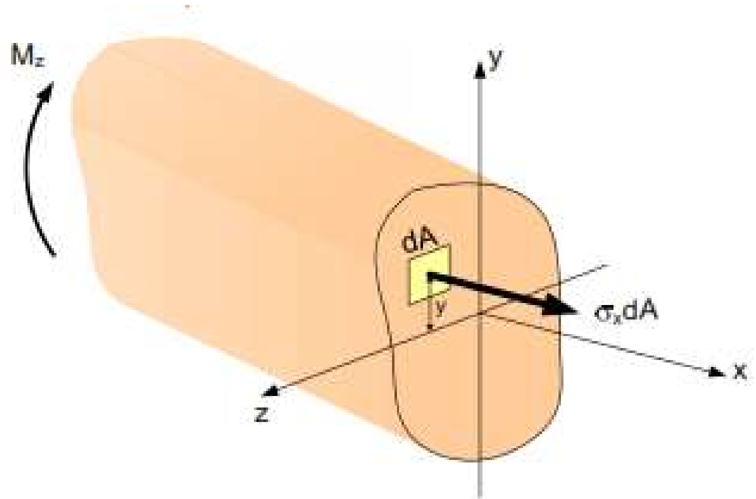


Basit eğilmeye zorlanan bir çubukta Bernoulli hipotezini göz önüne alarak liflerin uzama ve kısalmasını hesaplayalım. Şekilde görüldüğü gibi yukarıdaki lifler kısalmış aşağıdaki lifler uzamış ve çubuk ekseninden geçen bir düzlem içindeki lifler ise ne uzamış ne de kısalmıştır. Bu düzleme ……… veya Nötr ………. denir.

Tarafsız düzlemin en kesit düzlemi ile ara kesitine …………………..denir.

Basit Eğilmede Simetrik Bir Elemanda Şekil Değiştirmeler

Tarafsız eksenden y uzaklığındaki bir lifin (ab lifinin)uzama oranı ε_X dir.



r yarı çaplı θ merkez açılı yay uzunluğu θr dir.

ρ eğilmiş eksenin eğrilik yarıçapıdır. Görülüyor ki boylamasına liflerin uzama ve kısalması yani boy değişmesi tarafsız (eksenden) yüzeyden olan y uzaklığı ile doğru ve eğrilik yarıçapı ile ters orantılıdır.

Gerilmelerin hesabı için Hooke kanununu tatbik edersek, Bu formül bize Eğilmede meydana gelen normal gerilmelerin de **y** ile orantılı olduğunu gösterir. Eğilmede tarafsız eksenden eşit uzaklıktaki noktalarda eşit gerilmeler meydana gelir.

Gerilme yayılışı hakkında bilgi edinmiş olmakla birlikte, **ρ ile M** eğilme momenti arasında bir bağıntı kuramadık; bir de y'lerin tarafsız eksenden ölçüldüğünü söyledik, fakat tarafsız eksenin yerini belirlemedik. Bu bilgileri gerilmelerin kesit üzerindeki bileşkeleri ve momentleri yardımıyla elde edeceğiz.

Şekildeki kesit üzerinde bir dA alan elemanı alınmıştır.

Bu alan elemanına gelen σdA kuvvetinin alan üzerindeki toplamı, kesitteki normal kuvveti, momentlerinin toplamı ise eğilme momentini vermelidir

Kesitte yalnız eğilme momenti bulunduğundan σdA 'lerin toplamı sıfır olmalıdır.

olması gerektiği görülür. Bu da statik moment dediğimiz integralin sıfır olacağını gösterir.

Bu ise, tarafsız eksenin kesitin ağırlık merkezinden geçmesini gerektirir.
Biz xyz koordinat takımını şimdiye kadar hep ağırlık merkezine koyuyorduk.
Böylece bunun eğilme yönünden de doğru olduğu sağlanmış olmaktadır.

Böylece simetrik eğilme halinde tarafsız eksen, z ekseni olacaktır.

İkinci olarak da σdA kuvvetlerinin momentlerini kesitteki eğilme momentine eşit olduğu göz önüne alınırsa; z eksenine göre σdA'nın momenti yσdA olacağından (kuvvet basınç kuvveti)

$$\int_A y\cdot(-\sigma_x)\cdot dA = M_z \qquad \int_A y\left(\frac{E}{\rho}y\right)dA = M_z \qquad \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = M_z$$

bulunur. Üstteki integral kesitin z eksenine göre atalet momenti olan I_Z 'den başka bir şey değildir, o halde;

elde edilmiş olur. Bu formül, eğilme momenti ile eğrilik yarıçapı arasındaki bağıntıyı vermektedir. M büyüdükçe eğrilik büyümekte, (çubuğun eğriliği artmakta), EI_Z büyüdükçe eğrilik azalmaktadır. EI_Z şekil değişimine karşı gösterilen direnci temsil ettiğinden **Eğilme Rijitl**iği olarak isimlendirilir.

Bu ifade de eğilmedeki gerilme formülüdür. Bu ifadeden anlaşılacağı gibi eğilmeden dolayı oluşan gerilme y değeri (tarafsız eksenden olan mesafe) arttıkça gerilmede lineer olarak artmaktadır. Buna göre y'nin en büyük olduğu en alt ve en üst noktalarda en büyük gerilmeler ortaya çıkmaktadır. İşaretler göz önüne alınmaksızın şöyle ifade edilir.

BOYUTLANDIRMA

Gerilmelere göre boyutlandırmada $\sigma_{eb} = \frac{M_z}{I_z} y_{eb}$

formülünün esas alınacağı açıktır.

Pratikte $\mathbf{I_z / y}$ oranına ………………………………….adı verilir.

Çekme ve basma emniyet gerilmeleri eşit simetrik en kesite sahip kirişlerde

$$\boxed{W_z = \frac{I_z}{y_{eb}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{ek}}{\sigma_{eb}} = \frac{M_z}{I_z} y_{eb} = \frac{M_z}{W_z} \le \sigma_{em}$$

Eğer kullanılan çubuk malzemesinin, çekme ve basma emniyet gerilmelerinin birbirinden farklı olması ve/veya en kesitin z eksenine göre simetrik olmaması durumlarında çekme ve basma için iki ayrı mukavemet momenti
kullanılmalıdır.

$$W'_z = \frac{I_z}{y^*_{basma}}$$

$$W''_z = \frac{I_z}{y^*_{çekme}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma_{ek} = \frac{M_z}{W'_z} \leq \sigma^{em}_{basma}$$

$$\sigma_{eb} = \frac{M_z}{W''_z} \leq \sigma^{em}_{çekme}$$

ÖRNEK 1:

Çubuk, düşey simetri düzleminde etkiyen, iki eşit ve zıt yönlü kuvvet çiftine maruzdur.

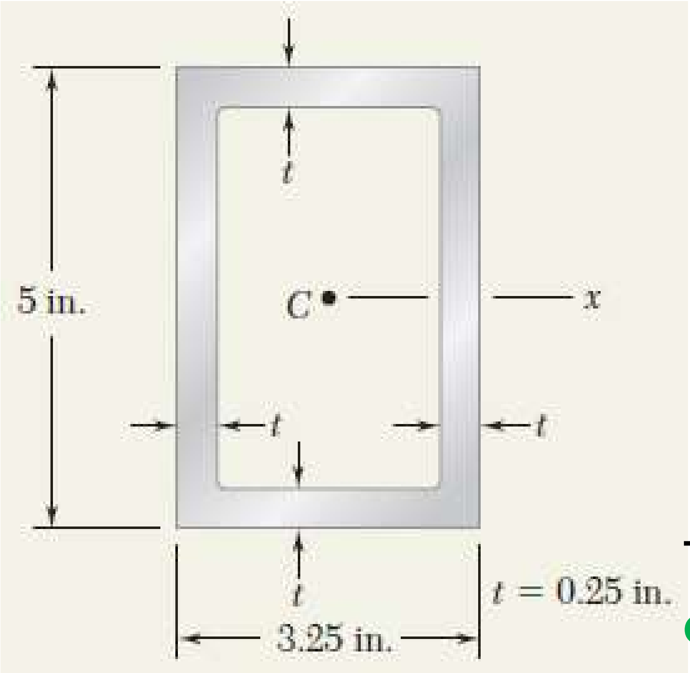
Çubuğun akmasına neden olan M eğilme momentinin değerini belirleyiniz.

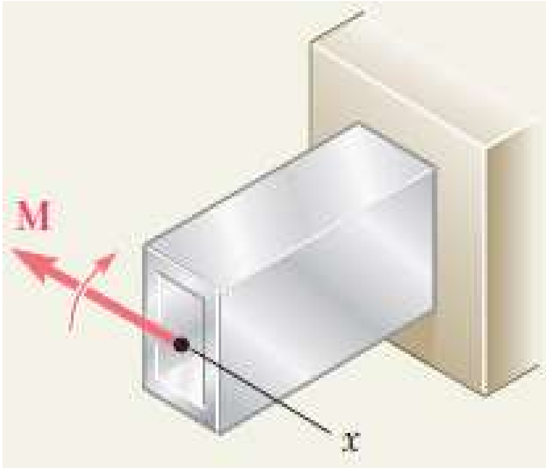
σ_Y = 250 MPa olduğunu varsayınız.

ÖRNEK 2:

Yarım çember kesitli alüminyum çubuk **ρ = 2.5 m** ortalama yarıçaplı bir çember yayı şeklinde eğilmiştir.
Çubuğun düz yüzü, yayın eğrilik merkezine doğru döndüğüne göre, çubuktaki maksimum çekme ve basınç gerilmesini belirleyiniz.
E = 70 GPa alınız.

ÖRNEK 3:





Tüp malzemesi: alüminyum.

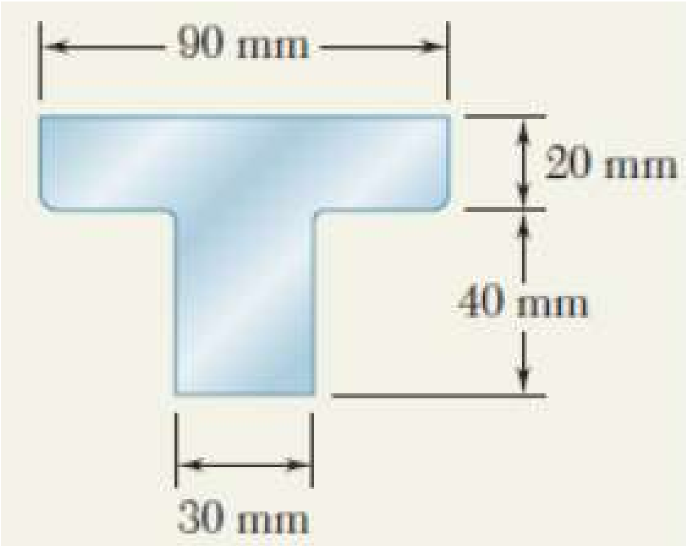
σ_Y = 275 MPa, σ_U = 415 MPa, E = 73GPa

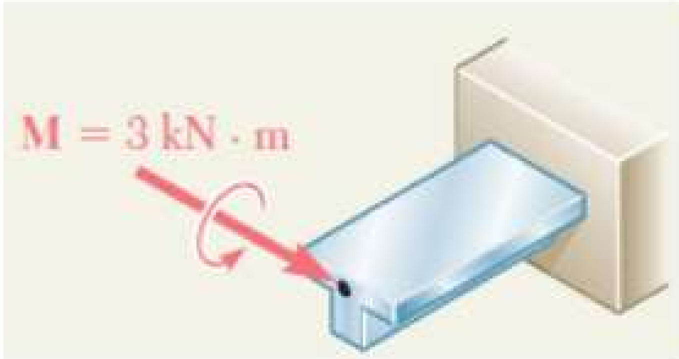
Kavislerin etkisini ihmal ederek,

(a) emniyet katsayısı 3.00 olacak şekilde M eğilme momentini,

(b) tüpün karşı gelen eğrilik yarıçapını belirleyiniz.

ÖRNEK 4:



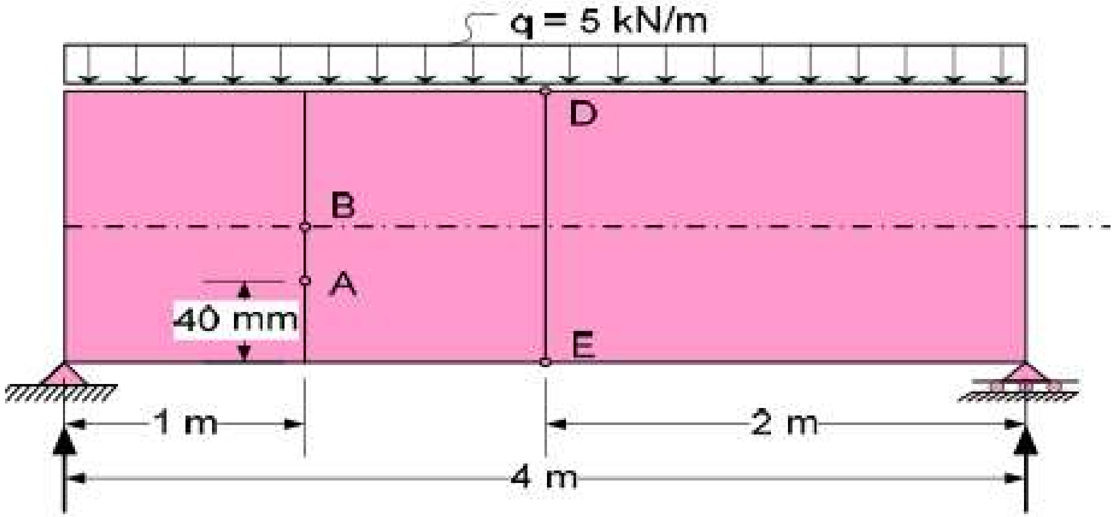


Dökme demirden yapılmış makine parçasının üzerine, 3kN·m’lik kuvvet çifti etkimektedir. E = 165 GPa olduğuna göre,

(a) parçadaki maksimum çekme ve basınç gerilmelerini,

(b) parçanın eğrilik yarıçapını belirleyiniz.

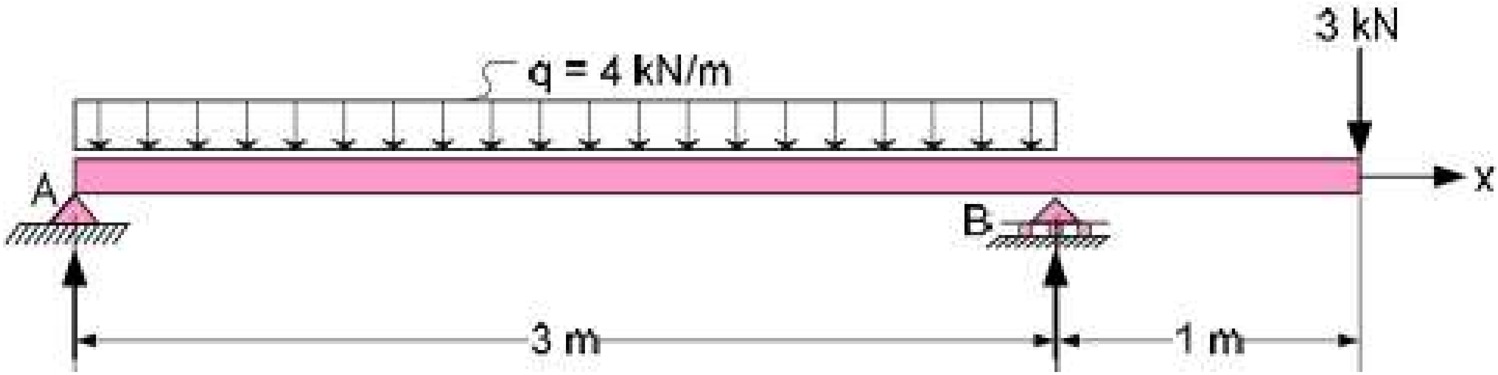
ÖRNEK 5:



Dökme demirden yapılmış (E =175 GPa) dikdörtgen kesitli bir kiriş 5kN/m'lik yayılı yük taşımaktadır.

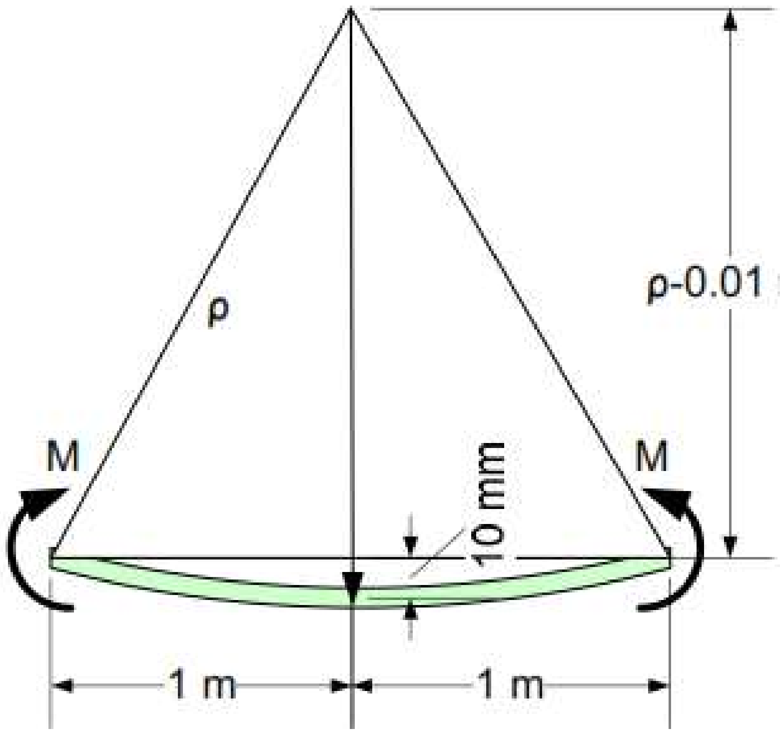
a) Açıklık ortasındaki en büyük çekme ve en büyük basma gerilmesini,
b) A noktasındaki normal gerilme ile uzama oranını,
c) B kesitindeki eğrilik yarıçapını hesaplayınız.

ÖRNEK 6:



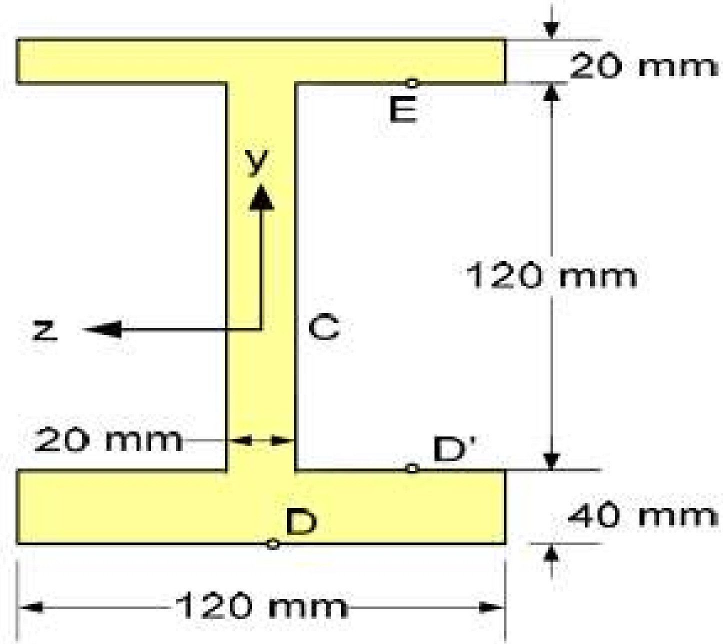
T kesitli çıkmalı bir kiriş şekilde gösterilen biçimde yüklenmiştir. Kirişte oluşacak en büyük çekme ve en büyük basma gerilmelerini hesaplayınız.

ÖRNEK 7:



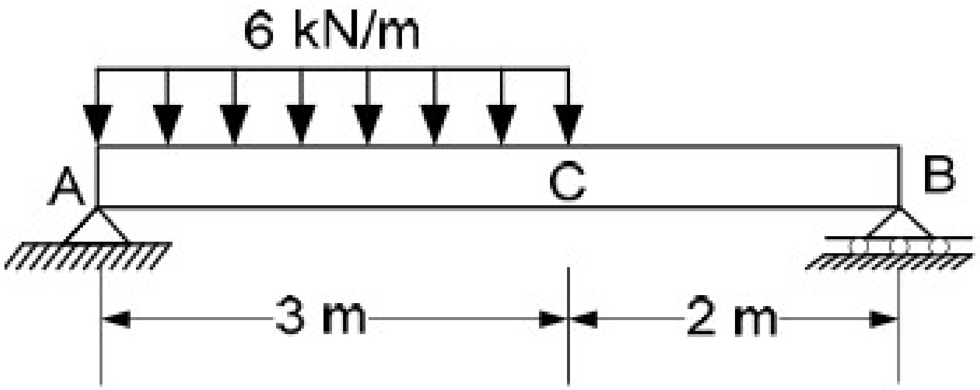
Genişliği 10, yüksekliği 30mm ve uzunluğu 2 m olan alüminyum çubuğun ortası uçlarından etki eden M eğilme momenti sebebiyle10 mm yer değiştirmiştir. Çubuğa etkiyen M momenti ile en büyük uzama oranın hesaplayınız E=70 GPa.

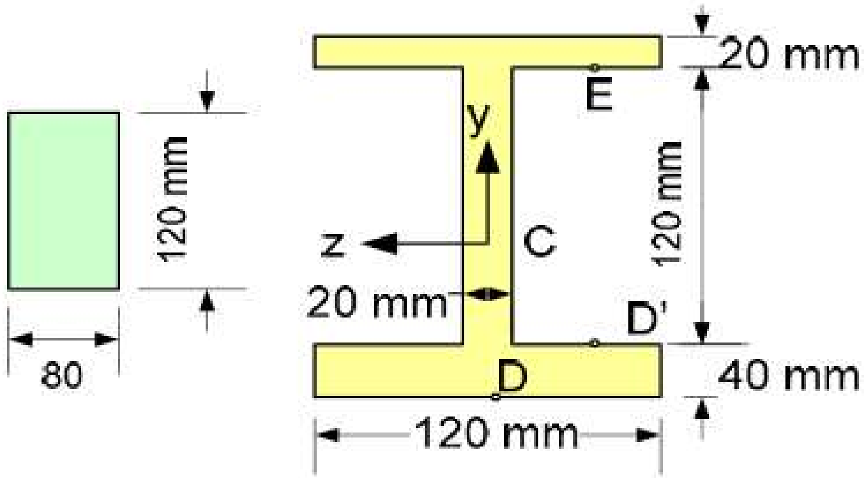
ÖRNEK 8:



Şekilde gösterilen kesite M=20 kNm lik eğilme momenti etkimektedir. Alt başlıkta taşınan toplam kuvveti hesaplayınız.

ÖRNEK 9:





Yükleme durumu ve boyutları verilen kirişin

a) **Dikdörtgen kesitli** olması durumunda oluşacak en büyük eğilme gerilmesinin yerini ve değerini,

b) **I kesitli olması** durumunda kiriş ortasında, enkesit üzerindeki D ve E noktalarındaki eğilme gerilmelerini hesaplayınız.