BÖLÜM 1

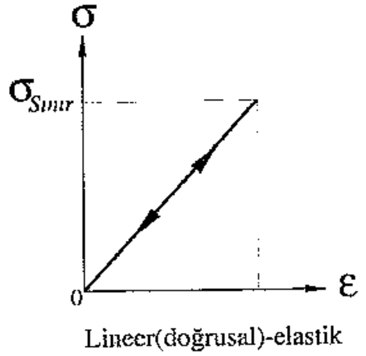
(İZOSTATİK SİSTEMLER)
İZOSTATİK DÜZLEM ÇUBUK SİSTEMLER

BÖLÜM 1: İZOSTATİK DÜZLEM ÇUBUK SİSTEMLER

Bu kitapta, yapı statiğinin temel konularından biri olan izostatik düzlem çubuk sistemler incelenecektir. Önce ele alınan konularla ilgili olarak kısa bilgiler verilecek, ardından açıklamalı örnekler ile bu konuların daha iyi anlaşılması sağlanacaktır. Öncelikle, yapı statiğinde yapılan varsayımların gözden geçirilmesi gerekmektedir.

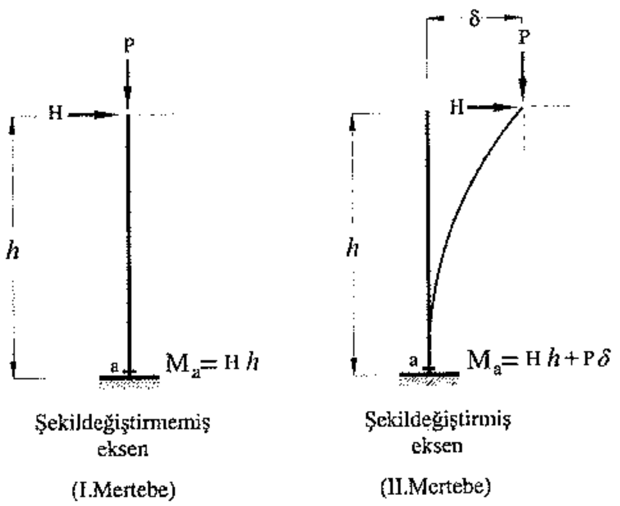
1.1 Yapı Statiğinde Yapılan Varsayımlar

1- Malzeme doğrusal-elastik davranış göstermektedir. Bu doğrusal-elastik malzeme tanımına uyan gerilme-şekildeğiştirme bağıntısı Şekil 1.1 de görülmektedir.



Şekil 1.1: Doğrusal-elastik malzemenin gerilme-şekildeğiştirme bağıntısı

2- Birinci Mertebe Teorisi geçerlidir. Bu teoride, geometri değişimlerinin (yerdeğiştirmelerin) denge denklemlerine olan etkileri terkedilmektedir. Şekil 1.2 de **I.** ve **II.** Mertebe teorilerine göre denge denklemlerinin nasıl yazılması gerektiği anlatılmaktadır.



Şekil 1.2: I. ve II. Mertebe teorilerine göre hesap

[redacted]

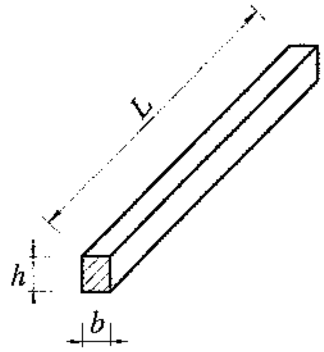
3- Yapı sistemi yüklemenin şekline ve şiddetine bağlı değildir. Yapı sistemini temsil eden hesap modeli, bütün hesap adımları boyunca değişmemektedir.

Yapı statiğinde yapılan bu varsayımlar sayesinde **"Süperpoziyon Prensibi"** geçerli olmaktadır.

Bu bölümün girişinde, kitap kapsamında çubuk sistemler ile ilgileneceği ifade edilmişti. Dolayısıyla, çubuk sistemleri oluşturan çubuk elemanın tanımının yapılması gerekmektedir.

1.2 Çubuk Eleman

Bir boyutu yanında diğer iki boyutu küçük olan elamandır, Şekil 1.3. Bir elemanın çubuk eleman olarak kabul edilebilmesi için elemanın bir boyutu L ise, diğer iki boyutu olan b ve h büyüklükleri L/2 den küçük eşit olmalıdır.



Şekil 1.3: Çubuk eleman

1.3 Yükler

Yapı sisteminde **iç kuvvet (kesit zoru) ve\veya şekildeğiştirme** ve **yerdeğiştirme** oluşturan etkilerin tümüne yük denir. Bu etkilere örnek olarak

a) Dış yükler (yapı yükleri, ilave yükler, kar, rüzgar ve deprem yükleri)

b) Sıcaklık değişmesi

c) Rötre

d) Mesnet çökmeleri (mesnetlerin tanımına uymayan yerdeğiştirmelerdir)

e) İlkel kusurlar

f) Öngerme ve ard germe

verilebilir.

İzostatik ve hiperstatik sistemlerde, çeşitli yükleme durumları için kesit zoru, şekildeğiştirme ve yerdeğiştirme büyüklüklerinin oluşup oluşmadığına ait bilgi Tablo 1 de verilmektedir.

Tablo 1: Kesit zoru, şekildeğiştirme ve yerdeğiştirmelerin oluşması durumu

Yükler (dış etkiler)	İzostatik sistem			Hiperstatik sistem		
	KZ	ŞD	YD	KZ	ŞD	YD
dış yükler	■	■	■	■	■	■
sıcaklık değişmesi,rötre	□	■	■	■	■	■
Mesnet çökmesi	□	□	■	■	■	■
İlkel kusurlar	□	□	■	■	■	■
Öngerme, ard germe	■	■	■	■	■	■

KZ: kesit zoru , ŞD: şekildeğiştirme , YD: yerdeğiştirme
□ : yok ■ : var

1.3.1. Dış Yüklerin Sınıflandırılması

- **Birinci Tür Sınıflandırma**

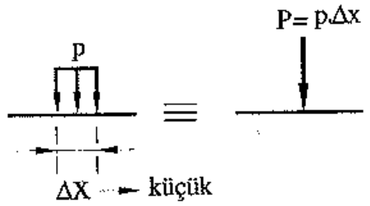
a) Yapı Yükleri (g, G) - (ölü yükler; özağırlık) : Yapının kendi ağırlığından oluşan yüklerdir.
b) İlave Yükler (q,Q) - (canlı yükler; insan, eşya, kar, araç) : Yapının taşımakla görevli olduğu yüklerdir.
c) Toplam Yükler (p=g+q , P=G+Q) - (Yapı+İlave Yükler)

- **İkinci Tür Sınıflandırma**

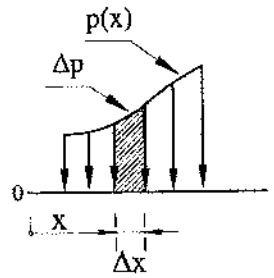
a) Sabit Yükler (yapı yükleri, insan, kar): Yapı üzerinde konum değiştirmeyen yüklerdir.
b) Hareketli Yükler (araç, vinç, vb) : Yapı üzerinde konum değiştiren yüklerdir.

- **Üçüncü Tür Sınıflandırma**

a) Tekil Yükler

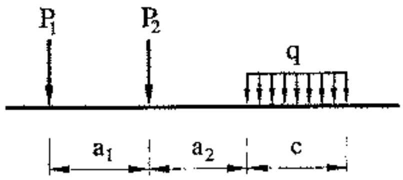


b) Yayılı Yükler



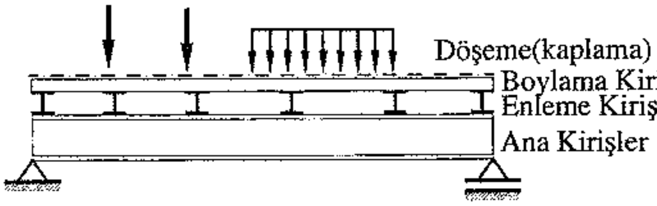
$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta x}$$ (p(x) : yayılı yükün şiddeti)

c) Yük Katarı : Şiddetleri ve ara uzaklıkları değişmeyen tekil ve yayılı yüklerden meydana gelen yük grubudur.



❖ **Dördüncü Tür Sınıflandırma**

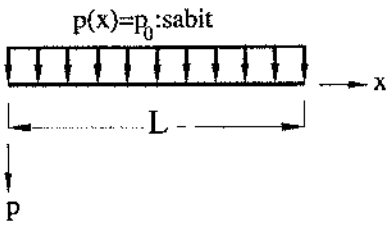
a) Dolaysız (direkt) Yükler : Yapıya doğrudan doğruya etkiyen yüklerdir.
b) Dolaylı (indirekt) Yükler : Yapıya doğrudan doğruya etkimeyen yüklerdir. (Örneğin, köprülerde döşeme yüklerinin, esas taşıyıcı kirişe enleme kirişleri ile aktarılması durumu)



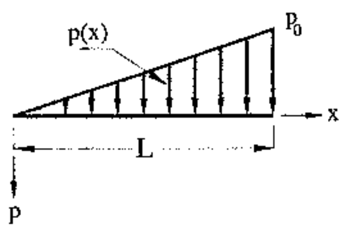
KÖPRÜ TAŞIYICI SİSTEMİ

1.3.2. Özel Yayılı Yükler

a) Düzgün yayılı yükler

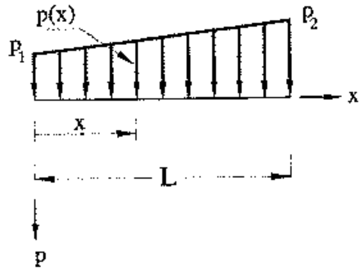


b) Üçgen yayılı yükler



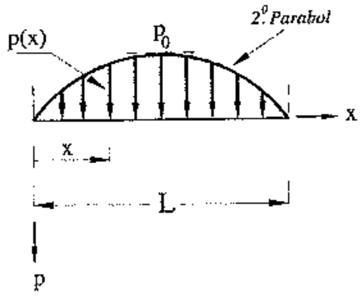
$$p(x) = p_0 \frac{x}{L}$$

c) Trapez yayılı yükler



$$p(x) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{L} x$$

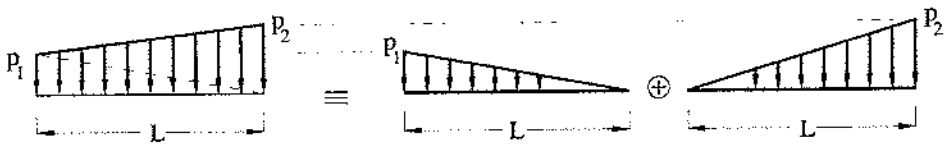
d) 2.° parabol yayılı yükler

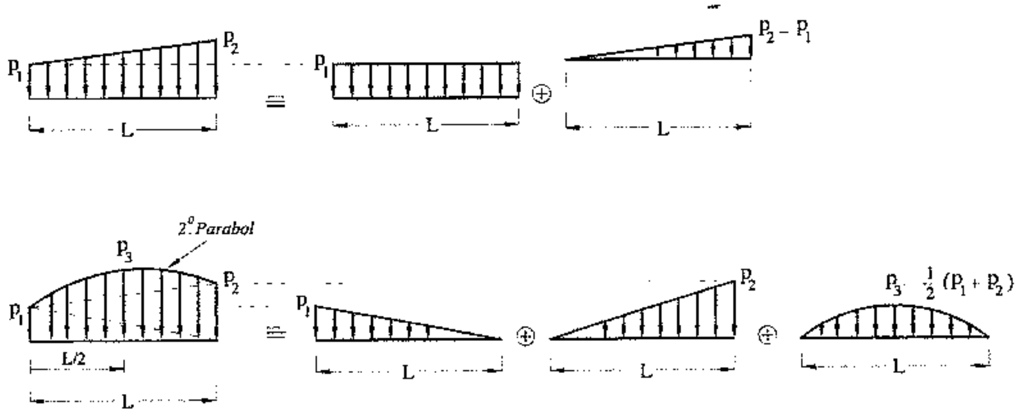


$$p(x) = \frac{4 p_0}{L^2} x(L - x)$$

1.3.3 Bileşik yayılı yüklerin bileşenlerine ayrılması

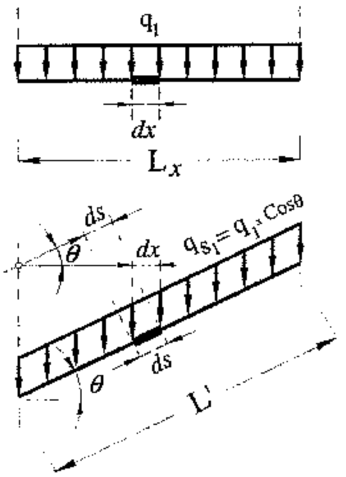
Bileşik yayılı yükler; süperpozisyon prensibinden yararlanmak suretiyle, özellikleri bilinen basit yayılı yüklere dönüştürülerek gözönüne alınabilirler, Şekil 1.4.





Şekil 1.4: Bileşik yayılı yüklerin basit yayılı yüklere dönüştürülmesi

Eğik bir çubuğun yatay eksenine dik doğrultuda etkiyen düzgün yayılı yükün, sözkonusu çubuğun eksenine dik ve paralel doğrultulardaki yayılı yüklere nasıl dönüştürüleceği aşağıda açıklanmaktadır.



Şekil 1.5: Eğik çubuğun yatay eksenine dik doğrultuda etkiyen yayılı yük durumu

Şekil 1.5 deki gibi eğik çubuğa etkiyen düzgün yayılı yük, bu çubuğun eğik boyu doğrultusunda etkiyen düşey yayılı yüke dönüştürüldüğünde, yayılı yükün şiddeti q_{s_1}

$q_1 \times dx = q_{s_1} \times ds$ eşitliğinden

$q_{s_1} = q_1 \times \dfrac{dx}{ds}$ elde edilir ve $dx = ds \times \cos\theta$ dönüşümü yapılması durumunda

$\mathbf{q_{s_1} = q_1 \times Cos\theta}$

bulunur.

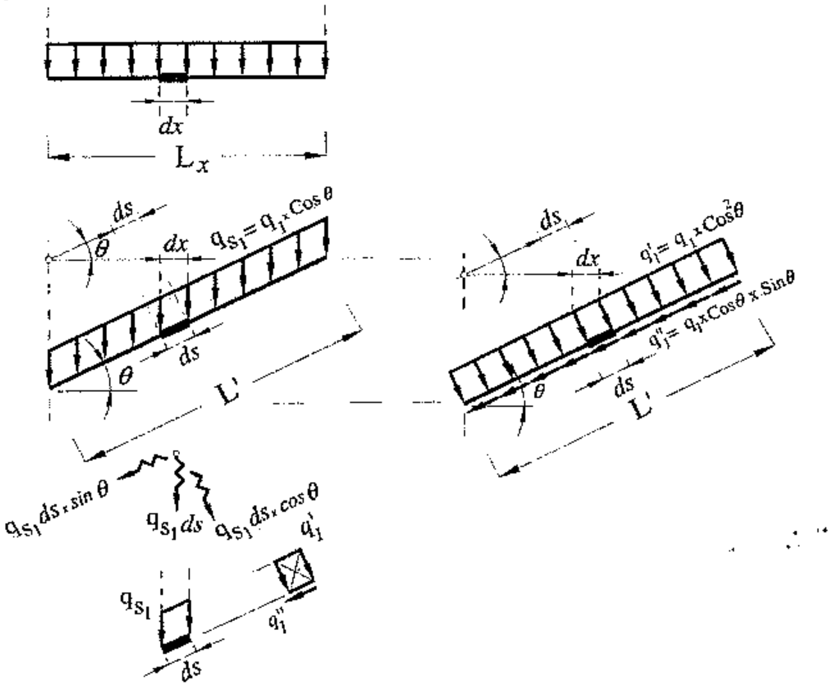
q_{s_1} yayılı yükü, eğik çubuk eksenine dik ve paralel doğrultuda bileşenlerine ayrılabilir, Şekil 1.6. Çubuk eksenine dik ve paralel yayılı yüklerin şiddetleri sırasıyla $q_1^{'}$ ve $q_1^{''}$ ile gösterilecek olursa

$$q_1^{'} = \left(q_{s_1} \times ds \times \cos\theta\right) / ds \quad , \quad q_1^{''} = \left(q_{s_1} \times ds \times \mathrm{Sin}\theta\right) / ds$$

ve q_{s_1} yerine $q_1 \times \mathrm{Cos}\theta$ yerine yazıldığında

$$\mathbf{q_1^{'} = q_1 \times cos^2\theta} \quad , \quad \mathbf{q_1^{''} = q_1 \times Cos\theta \times Sin\theta}$$

bulunur.



Şekil 1.6: Düzgün yayılı yükün eğik çubuk üzerindeki izdüşümleri

1.4 Bileşke

Belirli sayıdaki kuvvetlerin tümüne eşdeğer olan tek kuvvete, bu kuvvetlerin bileşkesi denir. Bileşke kuvvetin karakteristikleri :

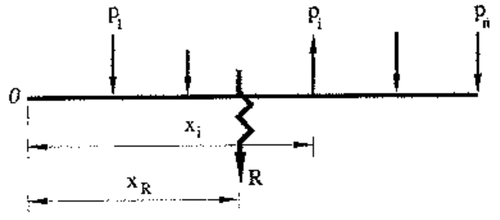
a)-doğrultusu
b)-yönü
c)-şiddeti
d)-uygulama noktası

olarak ifade edilir.

Teorem-1 : Bileşkenin herhangi bir doğrultu üzerindeki izdüşümü, bileşenlerin aynı doğrultudaki izdüşümleri toplamına eşittir.

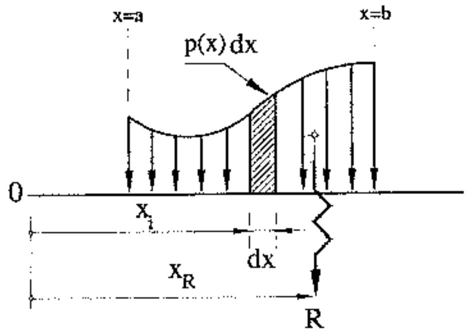
Teorem-2 : Bileşkenin herhangi bir noktaya göre statik momenti, bileşenlerin aynı noktaya göre statik momentleri toplamına eşittir.

1.4.1 Paralel tekil kuvvetlerin bileşkesi



$$R=\sum_{i=1}^{n}P_i \quad \text{ve} \quad (R)\times(x_R)=\sum_{i=1}^{n}(P_i)(x_i) \Rightarrow \quad x_R=\frac{\sum_{i=1}^{n}(P_i)(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}P_i}$$

1.4.2 Yayılı yüklerin bileşkesi

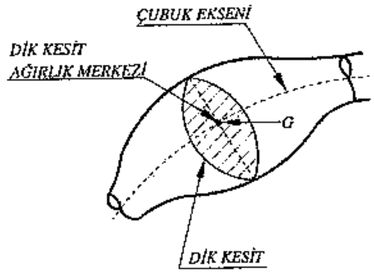


$$R=\int_a^b P(x)\,dx \quad \text{ve} \quad Rx_R=\int_a^b P(x)x\,dx \quad \Rightarrow \quad x_R=\frac{\int_a^b P(x)x\,dx}{\int_a^b P(x)\,dx}$$

1.5 Çubuk Sistemlerde Tanımlar

1.5.1 Çubuk ekseni ve dik kesit

Çubukta alınan dik kesitlerin ağırlık merkezlerinden geçen eğriye 'çubuk ekseni' denir. Çubuk ekseni üzerindeki bir noktadan bu eksene çizilen dik düzlemin çubuk ile arakesitine 'dik kesit' denir.



1.5.2 Çubuk türleri

Eksen eğrisinin formuna göre çubuklar

- Doğru eksenli çubuk
- Eğri eksenli çubuk

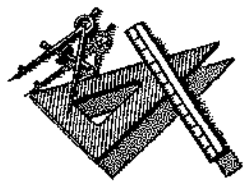
olarak sınıflandırılırlar.

Ayrıca, enkesit özelliklerine bağlı olarak

- Sabit enkesitli çubuk (Prizmatik çubuk)
- Değişken enkesitli çubuk

şeklinde de bir sınıflandırma yapılmaktadır.

BÖLÜM 1

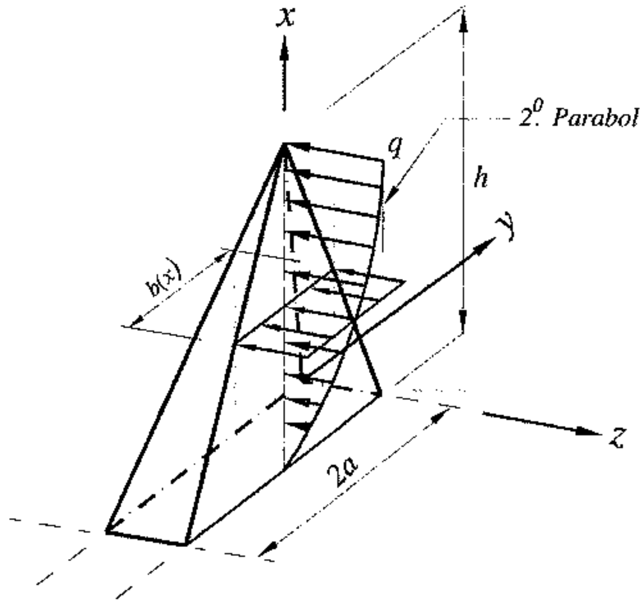


Çözümlü Problemler

[redacted]

PROBLEM 1.1

Şekil 1.1 de görüldüğü gibi boykesiti üçgen formunda olan bir yapıya rüzgar yüklerini temsil eden 2.° parabolü şeklinde bir yayılı yük etki etmektedir. Bu yükün **R** bileşkesini ve $\mathbf{x_G}$ uygulama noktasını verilen değişkenlere bağlı olarak ifade ediniz.



Şekil 1.1: Yapı ve rüzgar yüklemesi

ÇÖZÜM 1.1

Önce 2.° parabolü dağılımına uygun olarak etkiyen q(x) yük fonksiyonunun elde edilmesi gerekmektedir. Buna göre q(x) fonksiyonu

$$q(x) = ax^2 + bx + c \qquad \textbf{(I)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemdeki a, b ve c sabitleri, düşey doğrultuda yazılacak sınır koşullarıyla belirlenecektir.

$$x = 0 \ \text{ için } \ q(0) = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{c = 0} \qquad \textbf{(II)}$$

$$x = h \ \text{ için } \ q(h) = q \quad \Rightarrow \quad a \times h^2 + b \times h + c = q \qquad \Rightarrow \mathbf{q = ah^2 + bh} \qquad \textbf{(III)}$$

$$x = 2h \ \text{ için } \ q(2h) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \times 4 \times h^2 + b \times 2 \times h = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{a = -\frac{b}{2h}} \qquad \textbf{(IV)}$$

(IV) denklemindeki a ifadesi **(III)** bağıntısında yerine yazılırsa

$$q = \frac{-b}{2h} \times h^2 + bh \quad \Rightarrow \quad 2hq = -bh^2 + b2h^2 \qquad \Rightarrow \mathbf{b = \frac{2q}{h}} \qquad \textbf{(V)}$$

b ifadesi **(IV)** denkleminde yerine konulursa

[redacted]

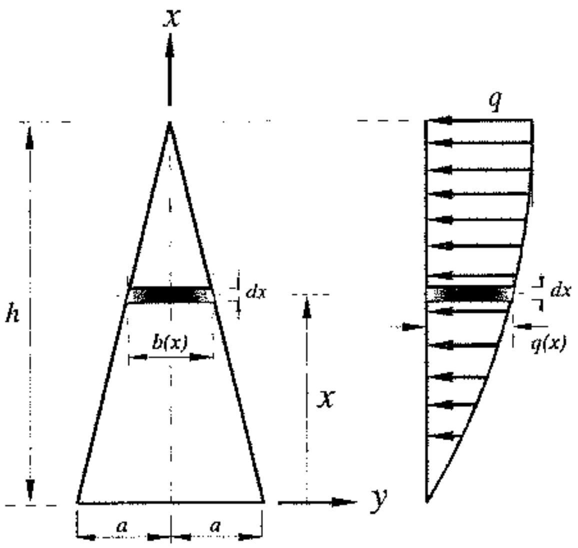
$$a = -\frac{\left(\frac{2q}{h}\right)}{2h} = -\frac{2q}{2h^2} \qquad \Rightarrow \mathbf{a = -\frac{q}{h^2}} \qquad \textbf{(IVa)}$$

şeklinde bulunur.

a, b ve c sabitlerinin **(I)** ifadesinde yerlerine yazılmasıyla q(x) yük fonksiyonu

$$q(x) = \frac{q}{h^2}(-x^2 + 2hx) \qquad \textbf{(VI)}$$

olarak bulunur.



Şekil 1.1a: dx kalınlıklı dilim parçası

Boykesitte üçgen formunda olan bu yapıda, b genişliğinin yapı yüksekliğine göre değişimi x parametresine bağlı olarak

$$b(x) = 2a\left(1 - \frac{x}{h}\right) \qquad \textbf{(VII)}$$

şeklindedir.

Parabol yayılı yükün bileşkesi R, Şekil 1.1a da ifade edilmiş olan dx kalınlığındaki dilim parçası hacminin yapı yüksekliği boyunca integre edilmesiyle

$$R = \int_{x=0}^{x=h} q(x)\,b(x)\,dx = 2a \times \frac{q}{h^2} \int_{x=0}^{x=h} (-x^2 + 2hx) \times \left(1 - \frac{x}{h}\right) dx$$

$$= 2a \times \frac{q}{h^2} \int_{x=0}^{x=h} \left(\frac{x^3}{h} - 3x^2 + 2hx \right) dx = \frac{2aq}{h^2} \left[\frac{x^4}{4h} - x^3 + hx^2 \right]_{x=0}^{x=h}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R = \frac{1}{2} qah}$$

elde edilir, Şekil 1.1b.

Bileşkenin uygulama noktası X_G

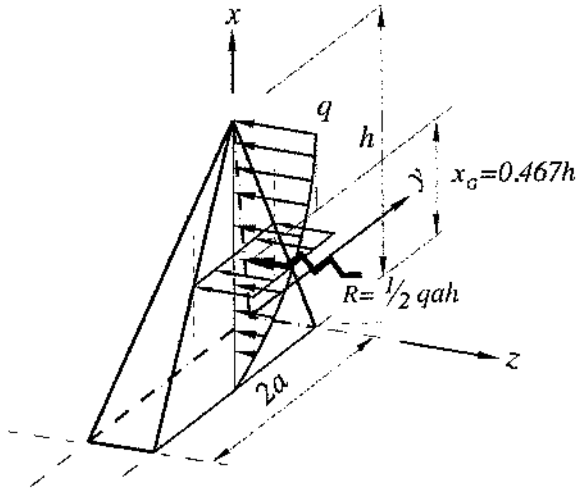
$$X_G = \frac{1}{R} \times \left(\int_{x=0}^{x=h} q(x) \cdot b(x) \cdot x dx \right) = \frac{1}{R} \times \left(\frac{2aq}{h^2} \times \left[\frac{1}{5} \frac{x^5}{h} - \frac{3}{4} x^4 + \frac{2}{3} hx^3 \right]_{x=0}^{x=h} \right)$$

$$= \frac{1}{R} \times \left(\frac{2aq}{h^2} \times \left[\frac{1}{5} h^4 - \frac{3}{4} h^4 + \frac{2}{3} h^4 \right] \right)$$

$$= \frac{1}{R} \times \left(\frac{7}{30} qah^2 \right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} qah \right)} \times \left(\frac{7}{30} qah^2 \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{X_G = \frac{7}{15} h = 0.467h}$$

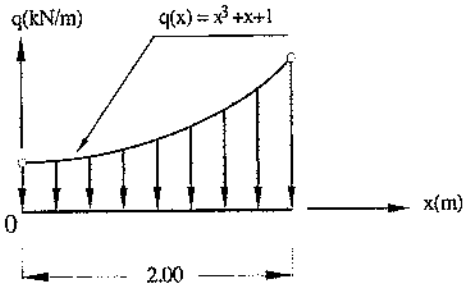
olarak elde edilir, Şekil 1.1b.



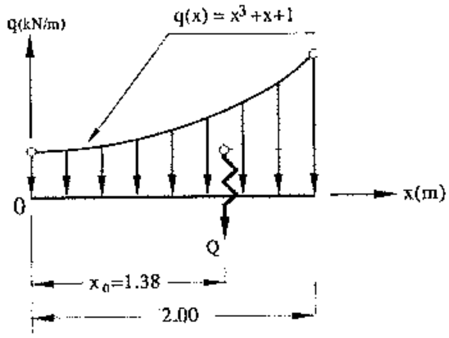
Şekil 1.1b: Bileşke kuvvet ve uygulama noktası

PROBLEM 1.2

Şekil 1.2 de, x değişkenine bağlı olarak ifade edilmiş olan $q(x)$ yayılı yükünün bileşkesinin şiddetini (Q) ve yerini (x_0) hesaplayınız.



Şekil 1.2: Yayılı yük



Şekil 1.2a: Bileşke kuvvet, uygulama noktası

ÇÖZÜM 1.2

✓ **Bileşke Kuvvetin Şiddetinin Hesaplanması :**

x uzaklığına bağlı olarak ifade edilen $q(x)$ yayılı yükünün, x=2.00m uzunluk boyunca integrasyonu ile bileşke kuvvetin şiddeti (Q) elde edilir. Buna göre Q

$$Q=\int_{x=0}^{x=2.00} q(x)\,dx=\int_{x=0}^{x=2.00}(x^3+x+1)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{x=0}^{x=2.00}=(8-0)\Rightarrow \mathbf{Q=8.00\,kN}$$

olarak bulunur, Şekil 1.2a.

✓ **Bileşke Kuvvetin Yerinin Hesaplanması :**

Bileşke kuvvetin (0) başlangıç noktasına olan uzaklığı

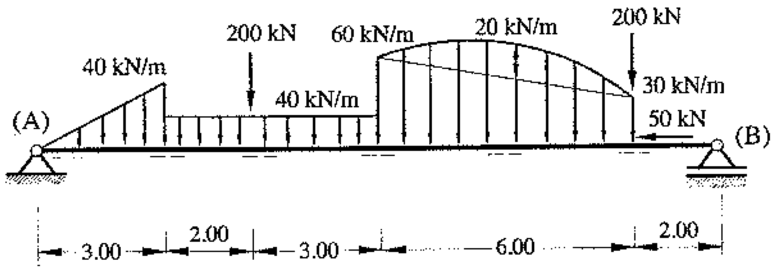
$$x_0=\frac{\int_{x=0}^{x=2.00} q(x)x\,dx}{\int_{x=0}^{x=2.00} q(x)\,dx}=\frac{\int_{x=0}^{x=2.00}(x^3+x+1)x\,dx}{Q}=\frac{\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2.00}}{8.00}=\frac{11.07}{8.00}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x_0=1.38\,m}$$

şeklinde elde edilir, Şekil 1.2a.

PROBLEM 1.3

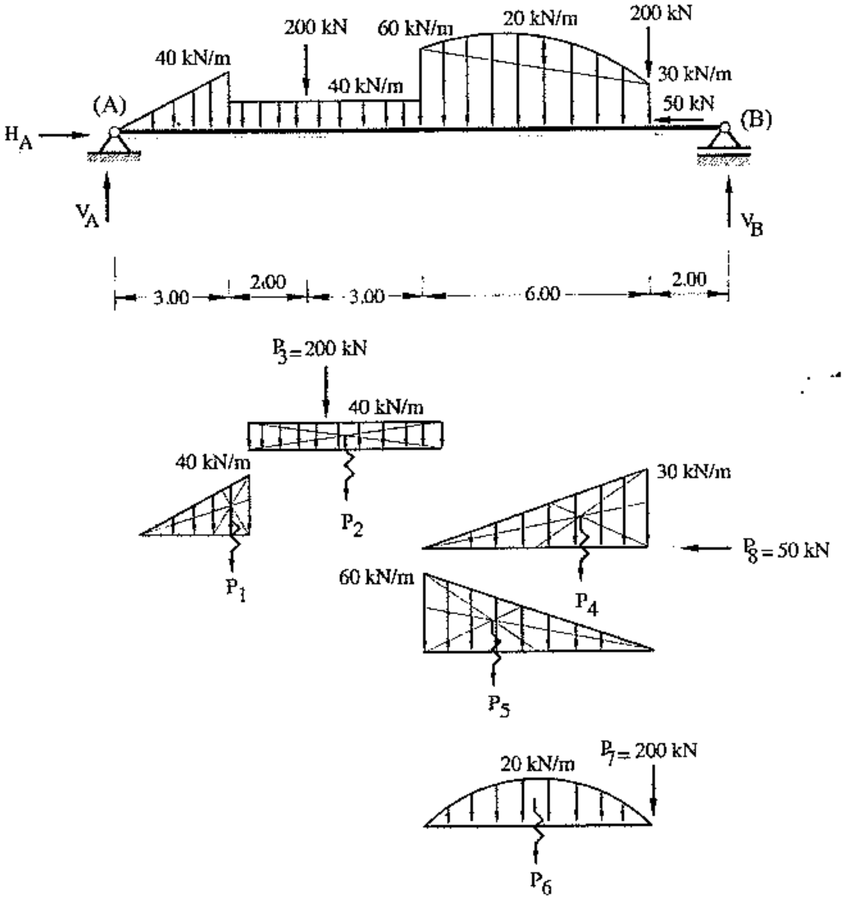
Şekil 1.3 de verilen basit kirişte,
a) Düşey yüklerin bileşkesinin şiddetini ve yerini bulunuz.
b) Mesnet tepkilerini hesaplayınız.



Şekil 1.3: Basit kirişve yükler

ÇÖZÜM 1.3

a) Düşey yüklerin bileşkesinin yeri ve şiddeti



Şekil 1.3a: Mesnet tepkileri ve yayılı yüklerin bileşkeleri

Şekil 1.3a da görülen yayılı yüklerin bileşkeleri P_1, P_2, P_4 P_5 ve P_6

$$P_1 = 40 \times \frac{3.00}{2} = 60\,\text{kN} \;,\; P_2 = 40 \times 5.00 = 200\,\text{kN} \;,\; P_4 = 30 \times \frac{6.00}{2} = 90\,\text{kN}$$

$$P_5 = 60 \times \frac{6.00}{2} = 180\,\text{kN} \;,\; P_6 = \frac{2}{3} \times 20 \times 6.00 = 80\,\text{kN}$$

olarak bulunur.

Basit kirişe etkiyen düşey yüklere ait bileşke kuvvet ve uygulama noktasının hesabı için Tablo 1.3 hazırlanmıştır.

Tablo 1.3: Kuvvetlerin A noktasına göre statik momentleri

	Yük	$x_{i,A}$ (m)	$(P_i \times x_{i,A})$ (kNm)
P_1	60	2.00	120
P_2	200	5.50	1100
P_3	200	5.00	1000
P_4	90	12.00	1080
P_5	180	10.00	1800
P_6	80	11.00	880
P_7	200	14.00	2800
		$\sum$:	**8780**

Şiddet: R=1010 kN ✔ **Yer:** $x_A = \dfrac{8780}{\sum_{i=1}^{N} R_i} = \dfrac{8780}{1010} = 8.693$ m ✔

b) Mesnet Tepkilerinin Hesabı

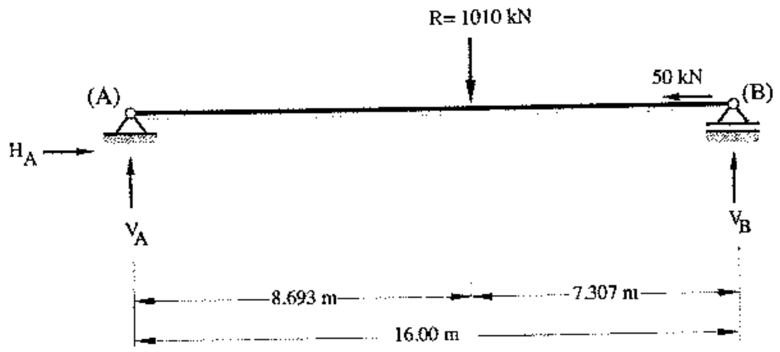
Yatay izdüşüm denge denkleminden H_A

(→+) $\Sigma F_x = 0$ $\quad H_A - 50 = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{H_A = 50.00\,kN} \rightarrow$ ✔

olarak elde edilir.

Yatay mesnet tepkisinin hesabından sonra, düşey mesnet tepkilerinin bulunması için aşağıda anlatılan iki yoldan birisi izlenebilir.

I. YOL : Bileşke kuvvet ve uygulama noktasının kullanılması ile hesap:



Şekil 1.3b: Bileşke kuvvet ve uygulama noktası

Tablo 1.3 de düşey yüklerin bileşke kuvveti ve bu kuvvetin uygulama noktası hesaplanmıştı. Bunlardan yararlanarak düşey mesnet tepkileri

$(\circlearrowleft +)\Sigma M_A=0$ $\quad 1010\times 8.693-16.00\times V_B=0 \quad \Rightarrow \mathbf{V_B = 548.75\ kN \uparrow}$

$(\circlearrowleft +)\Sigma M_B=0$ $\quad 16.00\times V_A-1010\times 7.307=0 \quad \Rightarrow \mathbf{V_A = 461.25\ kN \uparrow}$

olarak hesaplanır, Şekil 1.3b.

II. YOL : Klasik yol ile hesap:

B mesnetine göre moment denge denklemi yazılırsa V_A

$(\circlearrowleft +)\Sigma M_B=0$ $\quad V_A\times 16.00-P_1\times(1.00+13.00)-P_2\times 10.50-P_3\times 11.00-\ldots$

$\ldots -P_4\times 4.00-P_5\times 6.00-P_6\times 5.00-P_7\times 2.00=0$

$V_A\times 16.00-60\times(1.00+13.00)-200\times 10.50-200\times 11.00-\ldots$

$\ldots -90\times 4.00-180\times 6.00-80\times 5.00-200\times 2.00=0$

$\Rightarrow \mathbf{V_A = 461.25 kN \uparrow}$

ve düşey izdüşüm denge denkleminden V_B

$(\uparrow +)\Sigma F_y=0$ $\quad V_A-P_1-P_2-P_3-P_4-P_5-P_6-P_7+V_B=0$

$461.25-60-200-200-90-180-80-200+V_B=0$

$\Rightarrow \mathbf{V_B = 548.75\ kN \uparrow}$

elde edilir.

Kontrol: $(\circlearrowleft +)$ $\Sigma M_A=0$ olmalı.

$\Sigma M_A = P_1\times\frac{2}{3}\times 3.00+P_2\times 5.50+P_3\times 5.00+P_4\times 12.00+\ldots$

$\ldots +P_5\times 10.00+P_6\times 11.00+P_7\times 14.00-V_B\times 16.00=0$