

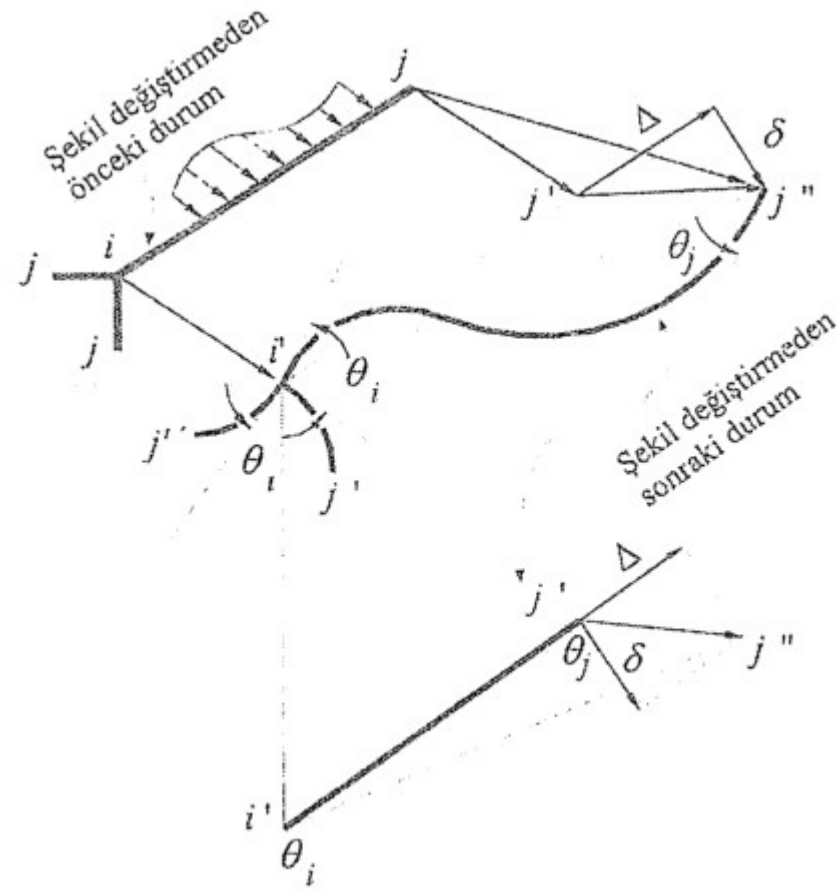
YAPI STATİĞİ II

KUVVET METODU

AÇI METODU

Hazırlayan: Yard.Doç.Dr.Kıvanç TAŞKIN

Düzlemi içinde yüklü düzlem çubuk bir sistemin herhangi bir $i - j$ çubuğunun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki konumları Şekil 6.97'de bir kez daha gözden geçirilmektedir.



θ_i , θ_j : Açısal uç yerdeğiştirmeleri, dönmeler
 δ , Δ : Göreli doğrusal uç yerdeğiştirmeleri

Kuvvet yöntemi ile hiperstatik bir sistem çözülrken *süreklilik denklemleri* yazılmış, hiperstatik bilinmeyenler bulunmuş, *denge denklemleriyle* uç kuvvetlerine geçilmiş, yerdeğıştirme hesaplarında da *bünye denklemleri* kullanılmıştır. Dolayısı ile çözümlün yerine getirmesi gereken tüm koşullar sağlanmışır. Bu hesabın sonunda ulaşılmakta olan yerdeğıştirmeler arasında Şekil 6.97' deki $i - j$ çubuğunun θ_i , θ_j , δ ve Δ ile gösterilen görelî uç yerdeğıştirmelerinin de bulunduğu düşünülebilir. Yerdeğıştirme yönteminde hesap bu noktadan başlayıp geriye, uç kuvvetlerinin bulunmasına doğru sürdürölmektedir. Yani esas itibariyle çubuk uç yerdeğıştirmeleri *bilinmeyenler* olarak alınmakta, düğüm noktalarında birbirine bağlanan çubuklar için *düğüm noktası süreklilik koşulları*, çubukların bir araya gelerek oluşturdukları çerçevelerde de *çerçeve süreklilik denklemleri* kullanılarak *süreklilik*, düğüm noktası veya sistem parçaları üzerinde yazılacak moment ve/veya izdüşüm denklemleriyle de *denge koşulları* sağlanmaktadır. Uç yerdeğıştirmeleri ile uç kuvvetleri arasındaki bağıntılar da temelde *bünye denklemlerine* dayanılarak kurulmaktadır. Bunlar, başlangıç niteliği taşıyan bu bölümde işlemlere katılmakta ve birim yerdeğıştirme sabitlerinin hesaplarında gözönüne alınmaktadır. Birinci mertbe teorisinin geçerli olduğu durumlarda; sistemin boyutlarına göre çok küçük olan ve dış yüklerden kaynaklanan Şekil 6.97' deki δ ve Δ uç yerdeğıştirmelerinin, bir anlamda şekildeğıştirmiş eksenin *denge ve süreklilik denklemlerinde* göz önüne alınması çoğu kez gerekli değildir.

DÜĞÜM NOKTALARINDA SÜREKLİLİK KOŞULLARI

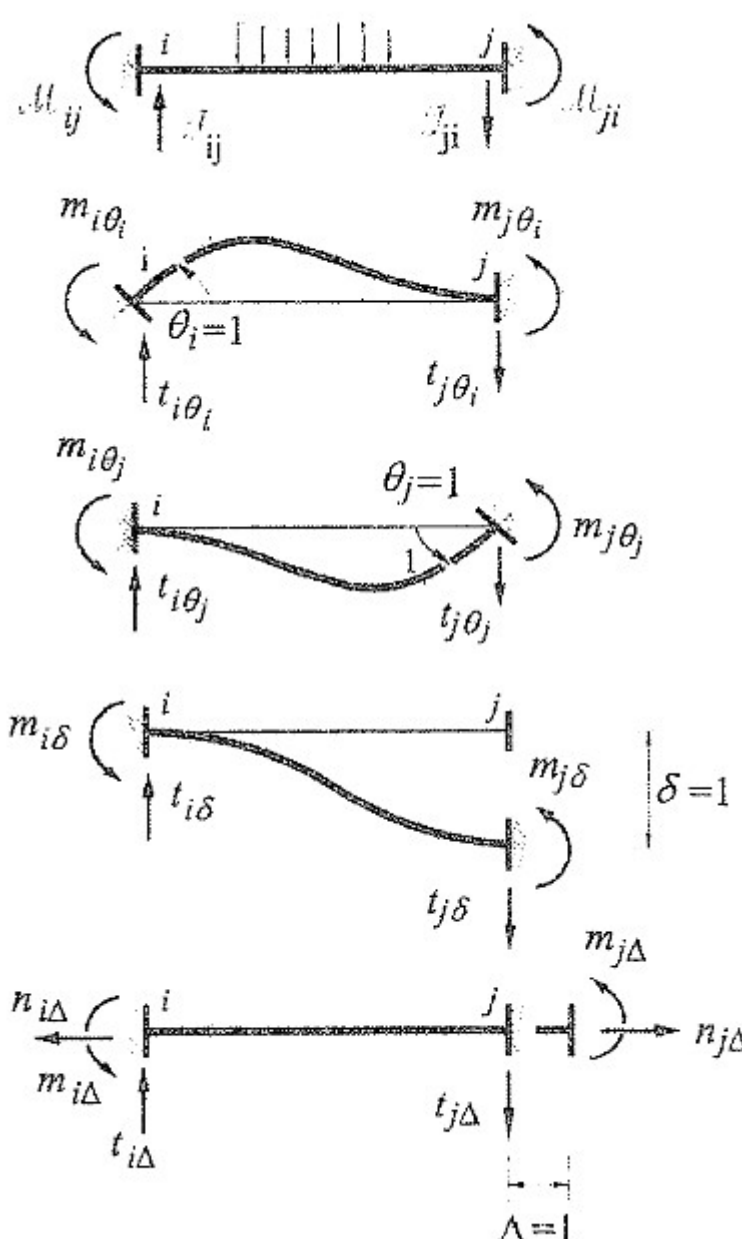
Şekil 6.97' de yer alan sistem parçasının i düğüm noktasına birleşen çubukları arasındaki açılar şekildeğiştirmeden sonra da korunmakta ve bu noktaya birleşen tüm çubukların uçlarındaki dönmeler birbirine eşit olmaktadır. Bu durum, çubukların düğüm noktası civarında büyük kalıcı şekildeğiştirmeler oluşmadığı ve birleşimlerin zaman ve dış etkiler nedeniyle gevşemediği sürece korunmuş sayılabilir. Dolayısıyla her düğüm noktasına kaç çubuk birleşiyor olursa olsun tüm çubuk uçlarında aynı miktarda dönme oluşmaktadır.

Gerçekte bir düğüm noktasından değil, sonlu boyutlardaki *bir kolon – kiriş birleşim bölgesi* ile onun yakın çevresi ile ilgilenilmekte olduğu unutulmamalıdır. Yapı mühendisi birleşim bölgesinin davranışı ve o bölgeye yaklaşan elemanlarının birbirlerine yük aktarımı konusunda sorgulayıcı olmalıdır.

Aksi söylenmedikçe bir düğüm noktasına birleşen çubukların birbirlerine rijit bağlanmakta oldukları ve düğüm noktasındaki dönme sürekliliğinin de doğrudan doğruya sağlanmakta olduğu varsayılmaktadır.

Uç Kuvvetleri ile Uç Yerdeğiştirmeleri Arasındaki Bağıntılar

Düzlemi içinde yüklü düzlem bir sistemin parçası olarak Şekil 6.97' de gösterilen $i - j$ çubuğunun şekildeğiştirmeden sonra ulaştığı son duruma, uç yerdeğiştirmelerinin sıfır olduğu durumdan başlayıp, uç yerdeğiştirmelerinin sırayla olduğu varsayılarak da Şekil 6.99a' da özetlendiği gibi gelinmiş olabilir. Şekil 6.1'deki genel uç yerdeğiştirmeleri göz önünde bulundurularak, diğer bir gösterilimle $\bar{D}_4 = \delta = D_4 + D_6$, $\bar{D}_3 = \Delta = D_3 + D_5$ tanımları yapılarak genel şekildeğiştirme durumunu verecek her bir özel birim şekildeğiştirme durumunda i ve j uçlarında oluşan uç kuvvetleri, ayrı ayrı Şekil 6.99b ve c'de yer almakta ve aşağıda da çubuğun i ve j uçlarındaki uç kuvvetleri esas alınarak en genel şekilleriyle bir araya getirilmektedir. Uç kuvvetleri ile uç yerdeğiştirmeleri arasındaki bağıntılarda, öğretici özelliği yüksek olan ve bu kitapta da benimsenen *özgün İTÜ gösterilimi* kullanılmıştır.



<i>i</i> düğüm noktası		<i>j</i> düğüm noktası	
\mathcal{M}_{ij}	\mathcal{I}_{ji}	\mathcal{M}_{ji}	\mathcal{I}_{ji}
$m_{i\theta_i} \times \theta_i$	$t_{i\theta_i} \times \theta_i$	$m_{j\theta_i} \times \theta_i$	$t_{j\theta_i} \times \theta_i$
$m_{i\theta_j} \times \theta_j$	$t_{i\theta_j} \times \theta_j$	$m_{j\theta_j} \times \theta_j$	$t_{j\theta_j} \times \theta_j$
$m_{i\delta} \times \delta$	$t_{i\delta} \times \delta$	$m_{j\delta} \times \delta$	$t_{j\delta} \times \delta$
$m_{i\Delta} \times \Delta$	$t_{i\Delta} \times \Delta$	$m_{j\Delta} \times \Delta$	$t_{j\Delta} \times \Delta$

Uç kuvvetleri	Ankastrelik uç kuvvetleri	θ_i 'den	θ_j 'den	δ 'dan	Δ 'dan
		oluşan uç kuvvetleri			
M_{ij}	M_{ij}	$m_{i\theta_i} \times \theta_i$	$m_{i\theta_j} \times \theta_j$	$m_{i\delta} \times \delta$	$m_{i\Delta} \times \Delta$
T_{ij}	T_{ij}	$t_{i\theta_i} \times \theta_i$	$t_{i\theta_j} \times \theta_j$	$t_{i\delta} \times \delta$	$t_{i\Delta} \times \Delta$
N_{ij}	N_{ij}	$n_{i\theta_i} \times \theta_i$	$n_{i\theta_j} \times \theta_j$	$n_{i\delta} \times \delta$	$n_{i\Delta} \times \Delta$
M_{ji}	M_{ji}	$m_{j\theta_i} \times \theta_i$	$m_{j\theta_j} \times \theta_j$	$m_{j\delta} \times \delta$	$m_{j\Delta} \times \Delta$
T_{ji}	T_{ji}	$t_{j\theta_i} \times \theta_i$	$t_{j\theta_j} \times \theta_j$	$t_{j\delta} \times \delta$	$t_{j\Delta} \times \Delta$
N_{ji}	N_{ji}	$n_{j\theta_i} \times \theta_i$	$n_{j\theta_j} \times \theta_j$	$n_{j\delta} \times \delta$	$n_{j\Delta} \times \Delta$

$$M_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + m_{i\theta_i} \times \theta_i + m_{i\theta_j} \times \theta_j + m_{i\delta} \times \delta + m_{i\Delta} \times \Delta$$

$$T_{ij} = \mathcal{J}_{ij} + t_{i\theta_i} \times \theta_i + t_{i\theta_j} \times \theta_j + t_{i\delta} \times \delta + t_{i\Delta} \times \Delta$$

$$N_{ij} = \mathcal{N}_{ij} + n_{i\theta_i} \times \theta_i + n_{i\theta_j} \times \theta_j + n_{i\delta} \times \delta + n_{i\Delta} \times \Delta$$

$$M_{ji} = \mathcal{M}_{ji} + m_{j\theta_i} \times \theta_i + m_{j\theta_j} \times \theta_j + m_{j\delta} \times \delta + m_{j\Delta} \times \Delta$$

$$T_{ji} = \mathcal{J}_{ji} + t_{j\theta_i} \times \theta_i + t_{j\theta_j} \times \theta_j + t_{j\delta} \times \delta + t_{j\Delta} \times \Delta$$

$$N_{ji} = \mathcal{N}_{ji} + n_{j\theta_i} \times \theta_i + n_{j\theta_j} \times \theta_j + n_{j\delta} \times \delta + n_{j\Delta} \times \Delta$$

Düğüm Noktaları Sadece Dönen, Düğüm Noktaları Dönen ve Ötelenen Sistemler

Dış yükler etkisindeki doğru eksenli çubuk sistemlerin $\Delta = 0$ varsayımı yapılan bazı çubuklarında, sistemin sınır koşulları nedeniyle çubuk eksenlerine dik doğrultudaki görelî uç yerdeğiştirmesi δ da sıfır olabilmekte ve böyle bir durumda (6.133a) 'da verilen genel süperpozisyon denklemleri $\Delta = \delta = 0$ alınarak;

Uç Kuvvetleri	Ankastrelik uç kuvvetleri		θ_i 'den oluşan uç kuvvetleri		θ_j 'den oluşan uç kuvvetleri
$M_{ij} =$	\mathcal{M}_{ij}	+	$m_{i\theta_i} \times \theta_i$	+	$m_{i\theta_j} \times \theta_j$
$M_{ji} =$	\mathcal{M}_{ji}	+	$m_{j\theta_i} \times \theta_i$	+	$m_{j\theta_j} \times \theta_j$
$T_{ij} =$	\mathcal{T}_{ij}	+	$t_{i\theta_i} \times \theta_i$	+	$t_{i\theta_j} \times \theta_j$
$T_{ji} =$	\mathcal{T}_{ji}	+	$t_{j\theta_i} \times \theta_i$	+	$t_{j\theta_j} \times \theta_j$
$N_{ij} =$	\mathcal{N}_{ij}	+	$n_{i\theta_i} \times \theta_i$	+	$n_{i\theta_j} \times \theta_j$
$N_{ji} =$	\mathcal{N}_{ji}	+	$n_{j\theta_i} \times \theta_i$	+	$n_{j\theta_j} \times \theta_j$

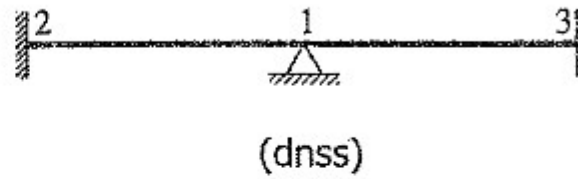
şekline indirgenmektedir. Çubuk uçlarında dolayısıyla düğüm noktalarında, sistemin şekildeğişirmesinden sonra sadece θ_i ve θ_j dönmeleri gözlenen bu tür sistemlere *düğüm noktaları sadece dönen* ya da *düğüm noktaları sabit sistemler* denir, Şekil 6.101.



$$\theta_i \neq 0, \theta_j \neq 0$$
$$\delta = \Delta = 0$$

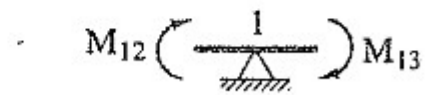
Şekil 6.101 Göreli uç yerdeğişirmeleri sıfır olan çubuklar

Örnek:1)



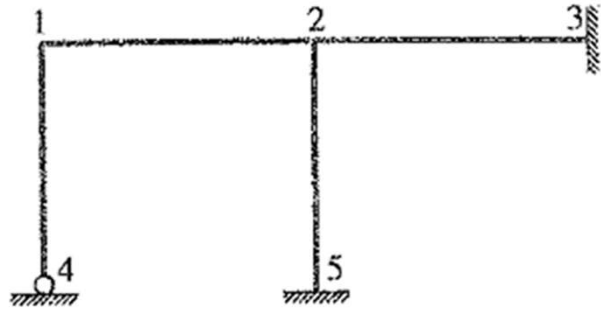
Bilinmeyen: θ_1

Denklem: $\sum M_1 = 0$



$$M_{12} + M_{13} = 0$$

Örnek:2)



(Eksenel boy değişmesi $\Delta_{ij} = 0$ kabul edilirse)
(dnss)

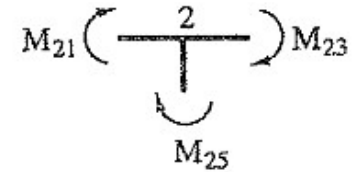
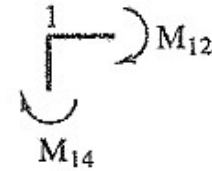
Bilinmeyenler: θ_1, θ_2

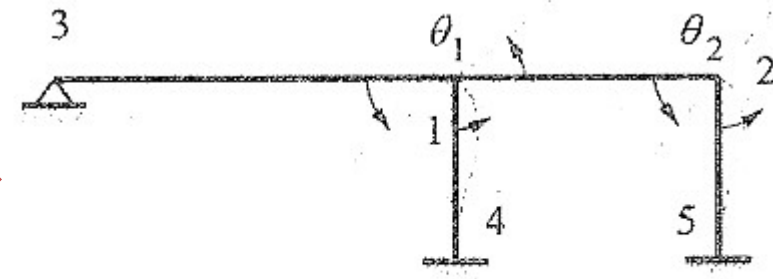
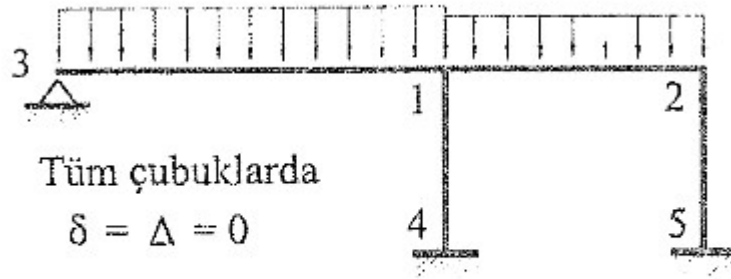
Denklemler: $\sum M_1 = 0$

$$M_{12} + M_{14} = 0$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$M_{21} + M_{23} + M_{25} = 0$$





a Şekildeğiştirme öncesi sistem ve dış yükler

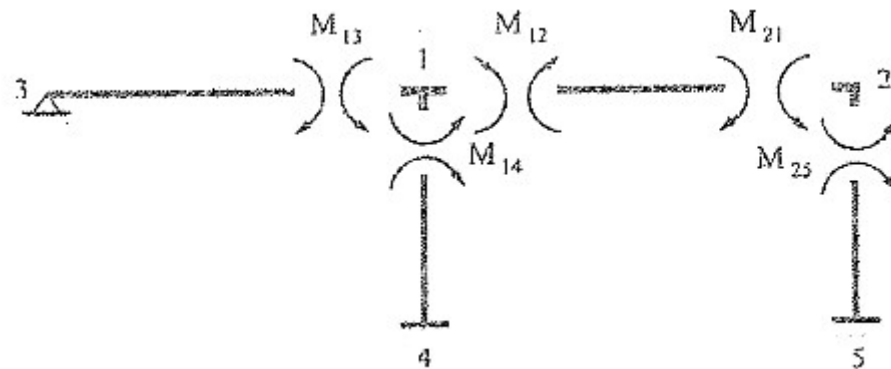
b Olası şekildeğiştirme durumu



$$\begin{aligned}
 M_{12} &= M_{12} + m_{1\theta_1}^{12} \times \theta_1 + m_{1\theta_2}^{12} \times \theta_2 \\
 M_{21} &= M_{21} + m_{2\theta_1}^{12} \times \theta_1 + m_{2\theta_2}^{12} \times \theta_2 \\
 M_{14} &= 0 + m_{1\theta_1}^{14} \times \theta_1 + 0 \\
 M_{41} &= 0 + m_{4\theta_1}^{14} \times \theta_1 + 0 \\
 M_{25} &= 0 + 0 + m_{2\theta_2}^{25} \times \theta_2 \\
 M_{52} &= 0 + 0 + m_{5\theta_2}^{25} \times \theta_2
 \end{aligned}$$

Burada dikkat edilmesi gereken konular arasında, üzerinde dış yük bulunmayan ve bir ucu ankastre mesnet olan 1 – 4 ve 2 – 5 çubuklarında uç kuvvetlerinin sırasıyla sadece 1 ve sadece 2 uçlarındaki düğüm noktası dönmelerine bağlı olmalarıdır. Sınır koşulları gözönüne alındığında, bunlardan farklı bir çubuk daha bulunmaktadır; 1 – 3 çubuğunun 3 ucu mafsallıdır yani θ_1 ve θ_2 için yapılan varsayımlardan bağımsız olarak dönecek ve moment almayacaktır. Bu çubuğun diğer ucundaki moment ise Bölüm VI.1.2.7’de incelenmiş olan bu özel mesnetlenme durumundaki yükleme sabitleri ile birim yerdeğiştirme sabitlerini, iki ucu ankastre olan durumdakilerden ayırmak üzere, *üstte bir çizgi* kullanılarak (6.136)’da verildiği şekilde yazılabilir;

$$\bar{M}_{13} = \bar{M}_{13} + \bar{m}_{1\theta_1}^{13} \times \theta_1 \quad (6.136)$$



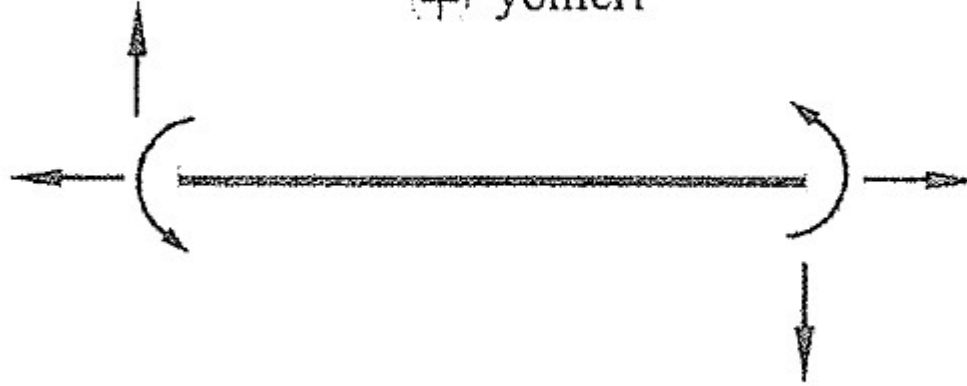
$$\sum M_1 = 0 \quad , \quad M_{13} + M_{12} + M_{14} = 0$$

$$\sum M_2 = 0 \quad , \quad M_{21} + M_{25} = 0$$

$$\left(\bar{M}_{13} + \bar{m}_{1\theta_1}^{13} \times \theta_1 \right) + \left(M_{12} + m_{1\theta_1}^{12} \times \theta_1 + m_{1\theta_2}^{12} \times \theta_2 \right) + \left(m_{1\theta_1}^{14} \times \theta_1 \right) = 0$$

$$\left(M_{21} + m_{2\theta_1}^{12} \times \theta_1 + m_{2\theta_2}^{12} \times \theta_2 \right) + \left(m_{2\theta_2}^{25} \times \theta_2 \right) = 0$$

yerdeştirme yöntemi
uç kuvvetlerinin ve uç yerdeştirmelerinin
(+) yönleri



a Yerdeştirme yöntemi

Hesapta İzlenecek Yol:

Düğüm noktaları sabit sistemlerin yerdeğiştirme yöntemi ile hesabında izlenecek yol aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- i. *Bilinmeyenlerin Belirlenmesi:* Bilinmeyenler düğüm noktalarının dönmeleridir. Düğüm noktaları belirlenirken mesnetler ile karıştırmamalıdır.
- ii. *Denklemlerin Belirlenmesi:* Çözümde kullanılacak denklemler, düğüm noktası moment denge denklemleridir. Bunların yazılabilmesi için düğüm noktalarını dönmeye zorlayan ankastrelik momentleri ile çubuk birim uç dönmelerine karşı gelen birim yerdeğiştirme sabitlerinin bilinmesine gereksinim vardır.
- iii. *Ankastrelik Momentlerinin Bulunması:* Ankastrelik momentleri, dış etkilere, çubuğun sınır koşullarına bağlıdır ve işaretleri yerdeğiştirme yöntemine uygun olan yönler göre belirlenmiş olmalıdır. Çubuk üzerinde saat ibreleri tersi yönünde olan ankastrelik momentlerinin artı olması öngörülmektedir, Şekil 6.107a. Bunlar, örnek olarak seçilmiş düzgün yayılı yük durumunda, sırasıyla iki ucundaki dönmeleri tutulmuş bir çubuk için Şekil 6.108a' da, bir ucu dönmeye karşı tutulmuş bir çubuk için de Şekil 6.108b₁ ve b₂' de gözden geçirilmektedir.

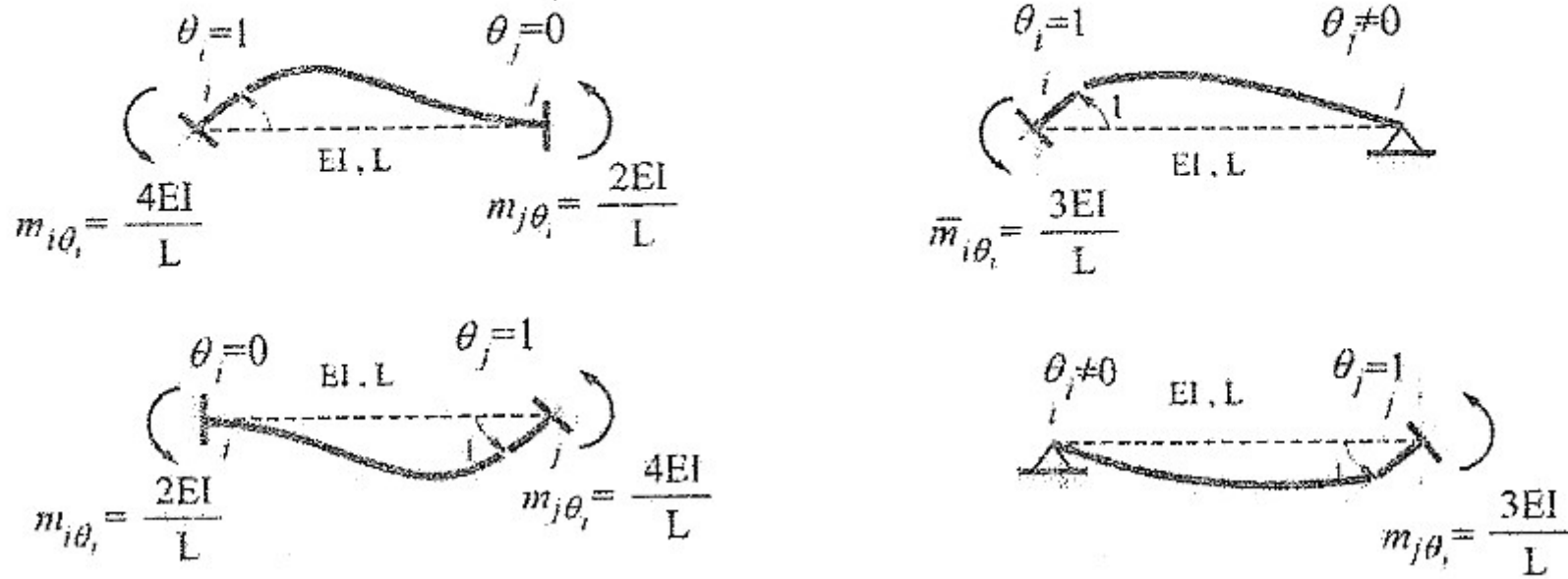
Gerçek yönler ve işaretler

$$\bar{u}_i = \frac{qL^2}{12} \quad \left(\text{Diagram of a fixed-fixed beam of length } L \text{ with a uniformly distributed load } q \text{ acting downwards.} \right) \quad \bar{u}_j = -\frac{qL^2}{12} \quad \mathbf{a}$$

$$\bar{u}_i = \frac{qL^2}{8} \quad \left(\text{Diagram of a fixed-pinned beam of length } L \text{ with a uniformly distributed load } q \text{ acting downwards.} \right) \quad \bar{u}_j = 0 \quad \mathbf{b}_1$$

$$\bar{u}_i = 0 \quad \left(\text{Diagram of a pinned-fixed beam of length } L \text{ with a uniformly distributed load } q \text{ acting downwards.} \right) \quad \bar{u}_j = -\frac{qL^2}{8} \quad \mathbf{b}_2$$

- iv. *Birim Yerdeğiştirme Sabitlerinin Bulunması:* Çubuk uçlarındaki birim dönmelerden oluşan bu uç momentleri, sınır koşullarına bağlıdır. Birim yerdeğiştirme sabitleri adını alan bu büyüklükler prizmatik doğru eksenli çubuklar gözönüne alındığında tek ve iki uçtaki dönmelerin tutulduğu durumlar için Şekil 6.109a ve b'de yeniden özetlenmektedir.



Şekil 6.109 Birim yerdeğiştirme sabitleri

- v. *Uç Kuvvetleri ile Uç Yerdeğiřtirmeleri Arasındaki Bađıntılar ve Dűgűm Noktası Denge Denklemleri:* İki ucu da dűnmeye karřı tutulmuř bir $i - j$ çubuđunda

$$M_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + m_{i\theta_i} \times \theta_i + m_{i\theta_j} \times \theta_j$$

$$M_{ji} = \mathcal{M}_{ji} + m_{j\theta_i} \times \theta_i + m_{j\theta_j} \times \theta_j$$

i ucu dűnmeye karřı tutulmuř j ucu serbestçe dűnen $i - j$ çubuđunda;

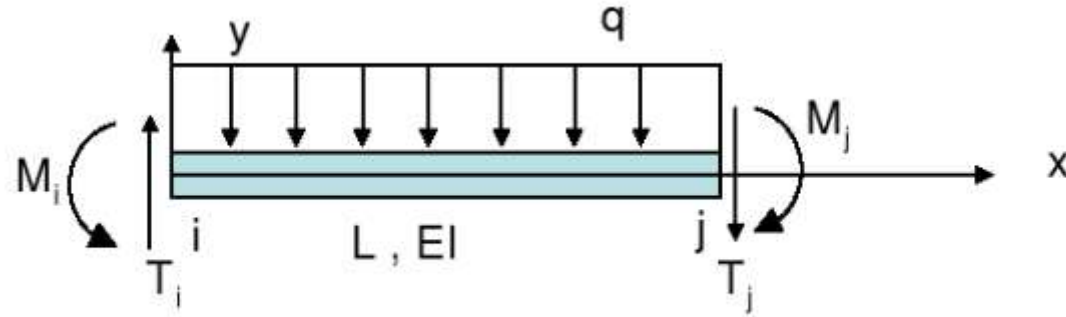
$$M_{ij} = \bar{\mathcal{M}}_{ij} + \bar{m}_{i\theta_i} \times \theta_i$$

j ucu dűnmeye karřı tutulmuř i ucu serbestçe dűnen $i - j$ çubuđunda;

$$M_{ji} = \bar{\mathcal{M}}_{ji} + \bar{m}_{j\theta_j} \times \theta_j$$

bađıntılarına başvurularak bűtűn çubuk uçlarındaki momentler parametrik olarak ifade edilebilir ve her dűgűm noktasında,

$$\sum M = 0$$



Bir yapı elemanında eleman uçlarında oluşan toplam momentler

1. Eleman üzerindeki dış yüklerden dolayı eleman uçlarında oluşan Ankastrelik uç momentleri (M_{ij}^F)
2. Eleman uçlarının dönmesi ile oluşan momentler (θ_i θ_j)
3. Eleman uçlarının birbirine göre relatif hareketi ile oluşan momentler'den (Φ_i)

oluşmaktadır.

$$k = \frac{2EI}{L} \quad \text{Rijitlik için verilen tanım yerine yazılırsa}$$

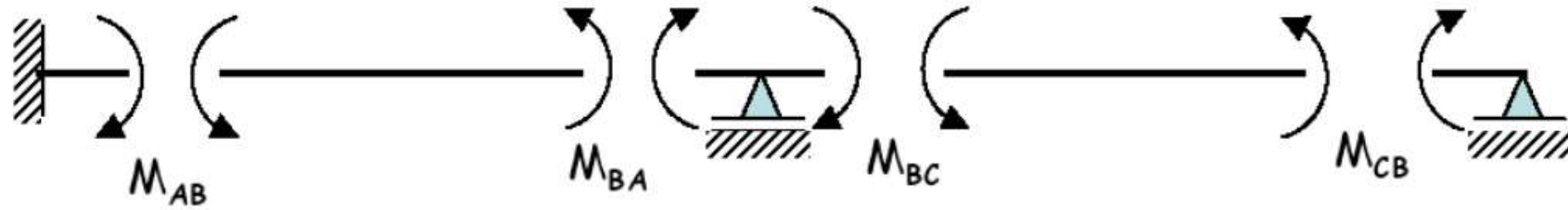
$$M_1 = k (2\theta_1 + \theta_2 - 3\phi)$$

$$M_2 = k (\theta_1 + 2\theta_2 - 3\phi)$$

$$M_{ij} = k_{ij} (2\theta_i + \theta_j - 3\phi_{ij}) + M_{ij}^F$$

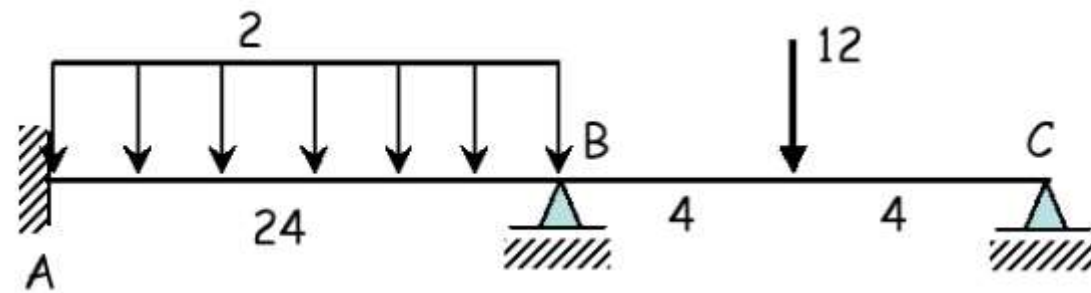
$$M_{ji} = k_{ij} (\theta_i + 2\theta_j - 3\phi_{ij}) + M_{ji}^F$$

Açı metodunda pozitif yön kabulü

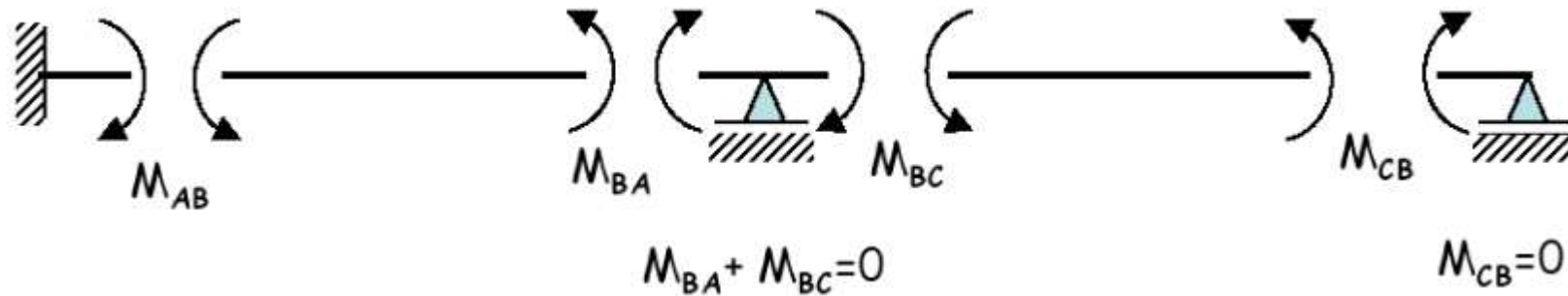
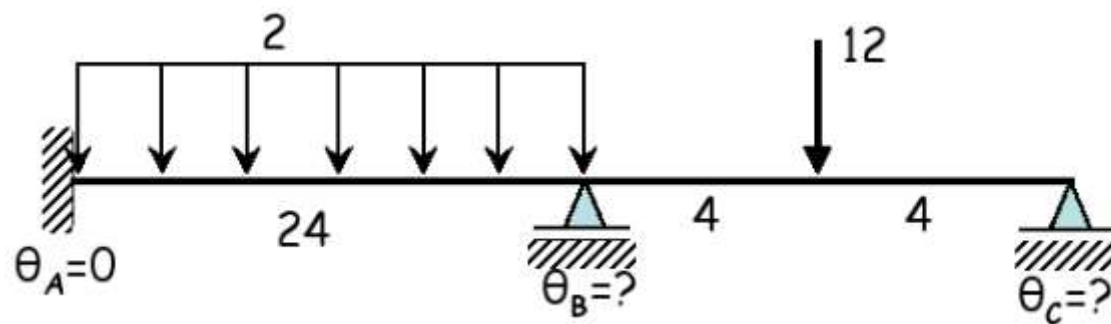


Moment değişim grafiği çizilirken kullanılan pozitif yön kabulü

Örnek 1:



Yanda özellikleri verilen sistemi açı metodu ile çözüünüz.



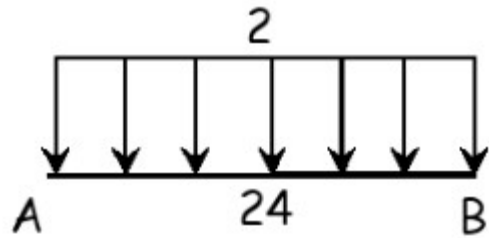
$$M_{AB} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M_{AB}^F$$

$$M_{BA} = 2E \frac{I}{L} (\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M_{BA}^F$$

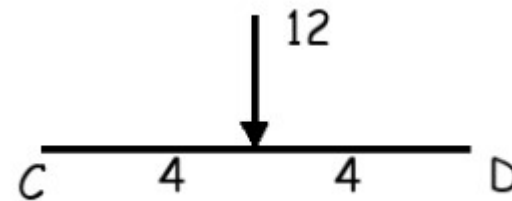
$$M_{BC} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_B + \theta_C - 3\phi) + M_{BC}^F$$

$$M_{CB} = 2E \frac{I}{L} (\theta_B + 2\theta_C - 3\phi) + M_{CB}^F$$

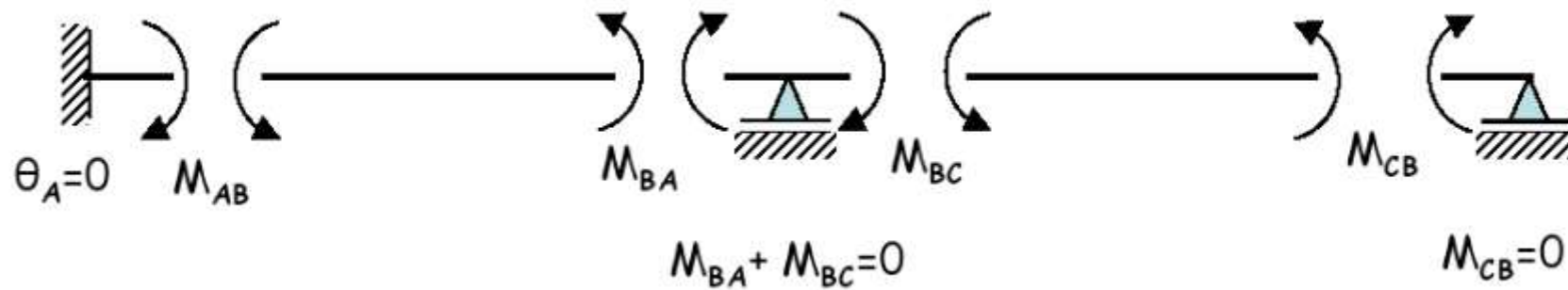
Ankastrelık uç momentleri



$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{2 \cdot 24^2}{12} = 96$$



$$M_{CD}^F = -M_{DC}^F = \frac{P \cdot l}{8} = \frac{12 \cdot 8}{8} = 12$$



$$M_{AB} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M_{AB}^F = 2E \frac{I}{24} (\theta_B) + 96$$

$$M_{BA} = 2E \frac{I}{L} (\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M_{BA}^F = 2E \frac{I}{24} (2\theta_B) - 96$$

$$M_{BC} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_B + \theta_C - 3\phi) + M_{BC}^F = 2E \frac{I}{8} (2\theta_B + \theta_C) + 12$$

$$M_{CB} = 2E \frac{I}{L} (\theta_B + 2\theta_C - 3\phi) + M_{CB}^F = 2E \frac{I}{8} (\theta_B + 2\theta_C) - 12$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 2E \frac{I}{24} (2\theta_B) + 96 + 2E \frac{I}{8} (2\theta_B + \theta_C) + 12$$

$$M_{CB} = 2E \frac{I}{8} (\theta_B + 2\theta_C) - 12 = 0$$

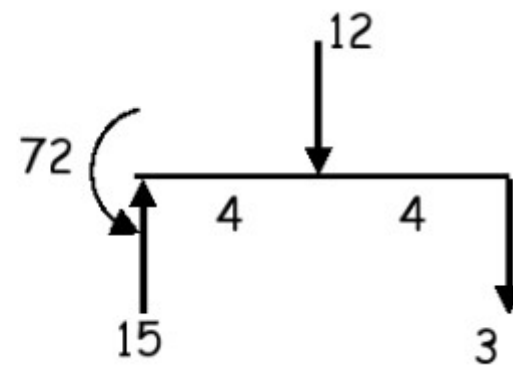
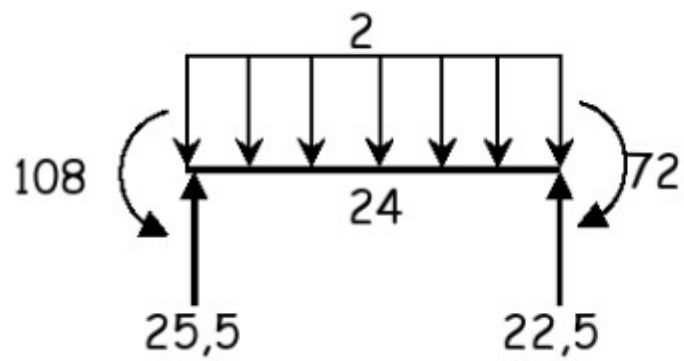
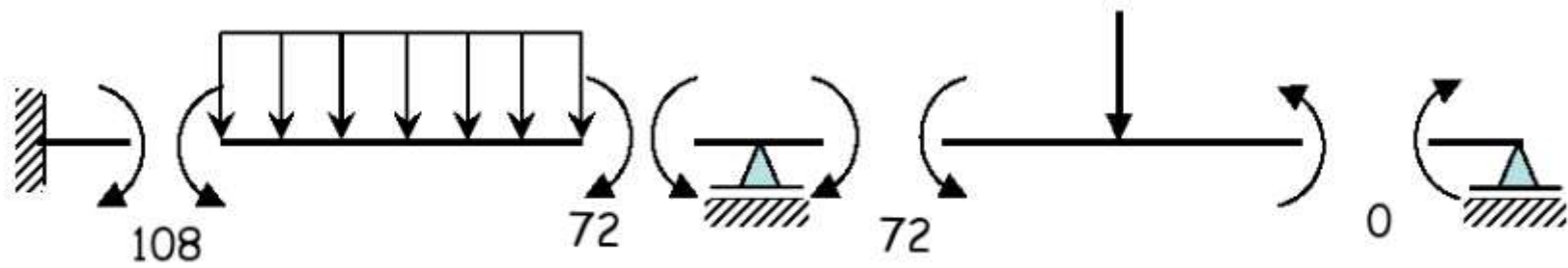
$$\left. \begin{aligned} \frac{EI}{6} (\theta_B) - 96 + \frac{EI}{2} (\theta_B) + \frac{EI}{4} (\theta_C) + 12 &= 0 \\ \frac{EI}{4} (\theta_B) + \frac{EI}{2} (\theta_C) - 12 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \theta_B &= \frac{144}{EI} \\ \theta_C &= \frac{-48}{EI} \end{aligned}$$

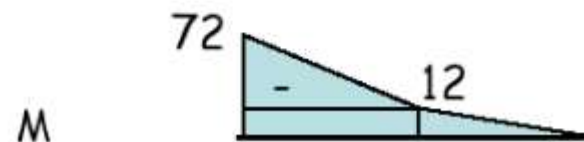
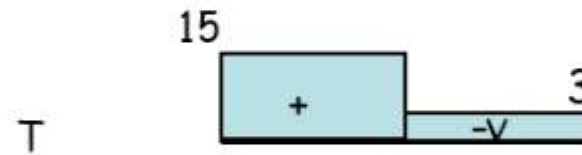
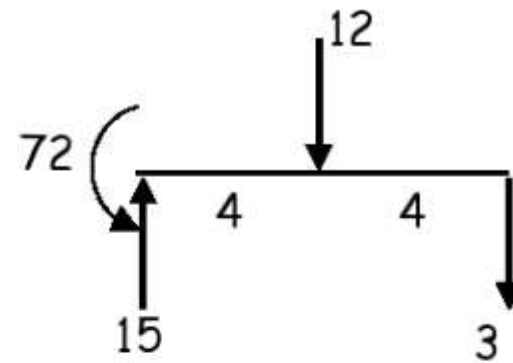
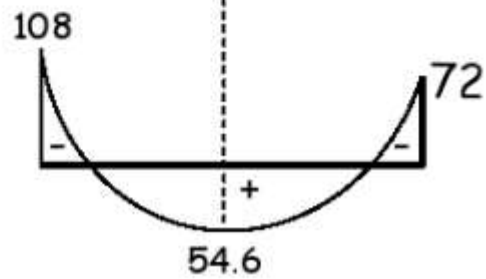
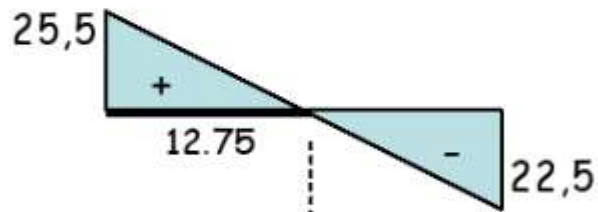
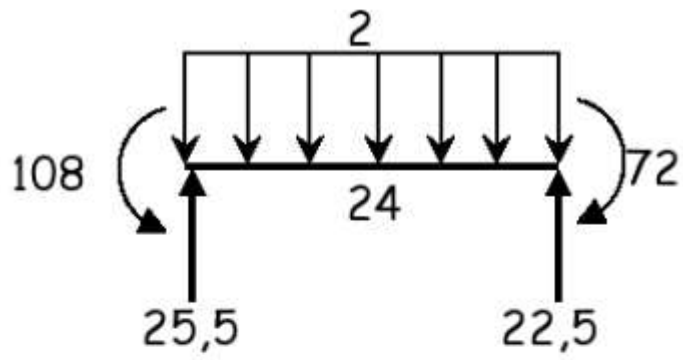
$$M_{AB} = 2E \frac{I}{24} (\theta_B) + 96 = 2 * \frac{EI}{24} * \frac{144}{EI} + 96 = 108$$

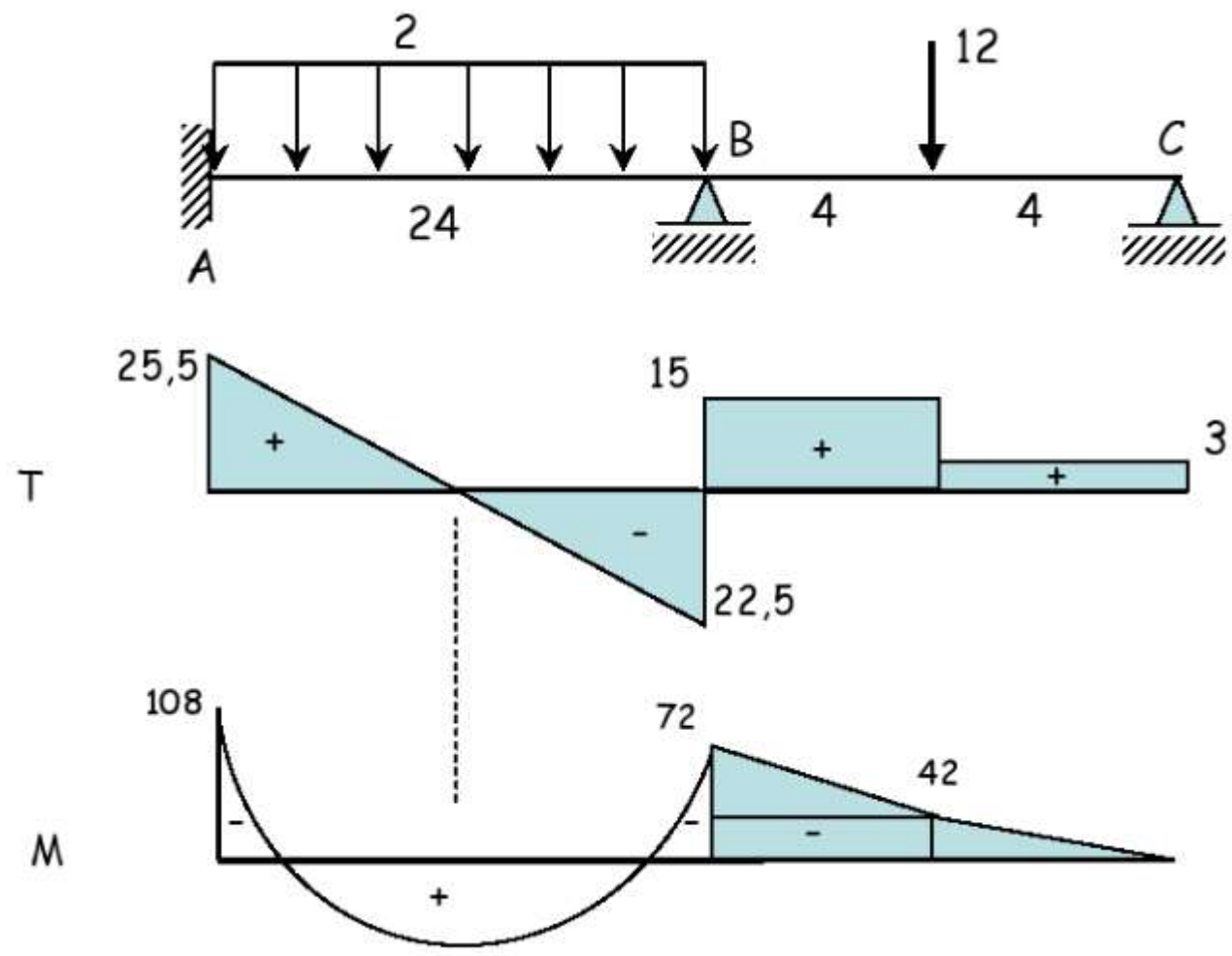
$$M_{BA} = 2 * \frac{EI}{24} (2 * \theta_B) - 96 = 2 * \frac{EI}{24} * (2 * \frac{144}{EI}) - 96 = -72$$

$$M_{BC} = 2 * \frac{EI}{8} (2\theta_B + \theta_C) + 12 = 2 * \frac{EI}{8} (2 * \frac{144}{EI} - \frac{48}{EI}) + 12 = 72$$

$$M_{CB} = 2 * \frac{EI}{8} (\theta_B + 2\theta_C) - 12 = 2 * \frac{EI}{8} (\frac{144}{EI} - 2 * \frac{48}{EI}) - 12 = 0$$







Açı Metodu ile Çözüm Yapılırken Uç Mesnette Momentin Sıfır Olması Durumu

Bu problem B ve C noktalarındaki dönmeler bilinmeyen olarak seçilip çözüldü. Diğer bir çözüm yöntemi için C noktasındaki momentin sıfır olması durumu kullanılmaktadır. Böylece seçilen bilinmeyen sayısı azaltılabilmektedir. Her iki çözümde de sonuç aynı çıkmaktadır. Ancak uç noktada sabit yada hareketli mesnet olması halinde momentin sıfır olması özelliği kullanılması durumunda çözüm daha kolay elde edilmektedir.

Yukarıdaki örnekte B ve C noktalarındaki dönmeler bilinmeyen olarak seçilip daha önce anlatılan şekilde çözüm yapılabilir.

C noktasındaki dönme değeri bilinmeyen olarak seçilmeden çözüm yapılmak istenmektedir. Sistemde bilinmeyen olarak sadece B düğümünün dönmesidir. Bu durumda AB çubuğundaki uç momentler M_{AB} ve M_{BA} için daha önce yazılan moment denklemleri kullanılır.

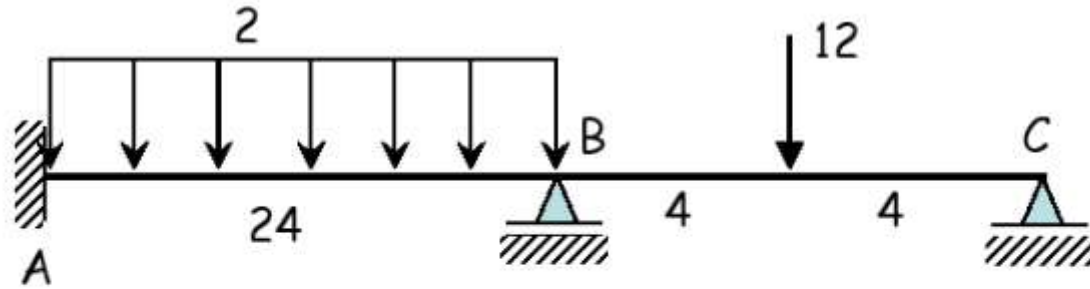
$$M_{AB} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M_{AB}^F$$

$$M_{BA} = 2E \frac{I}{L} (\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M_{BA}^F$$

Ancak C noktasındaki momente değeri sıfır olduğu bilinmektedir. Bu durumda BC çubuğundaki momente değerleri şu denklemlerle yazılır.

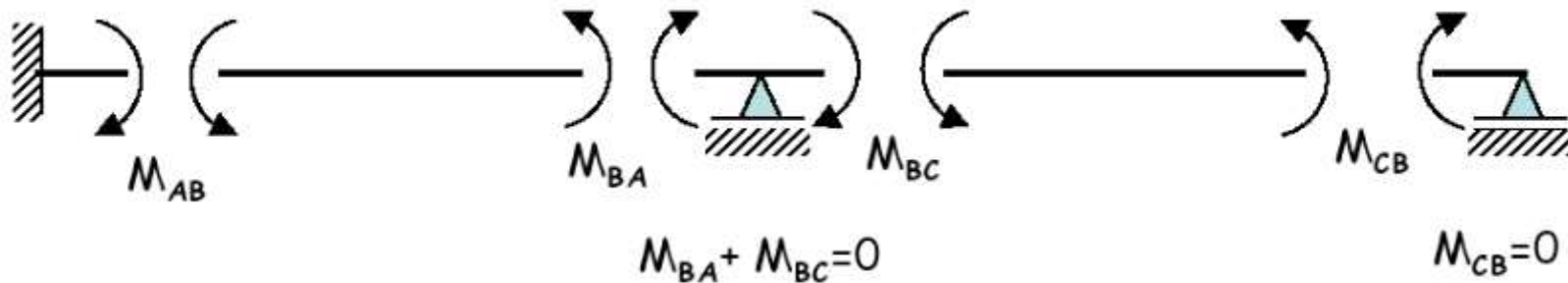
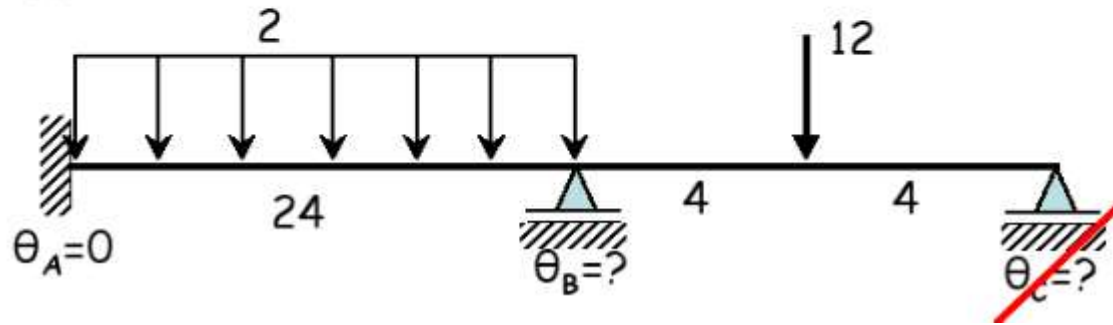
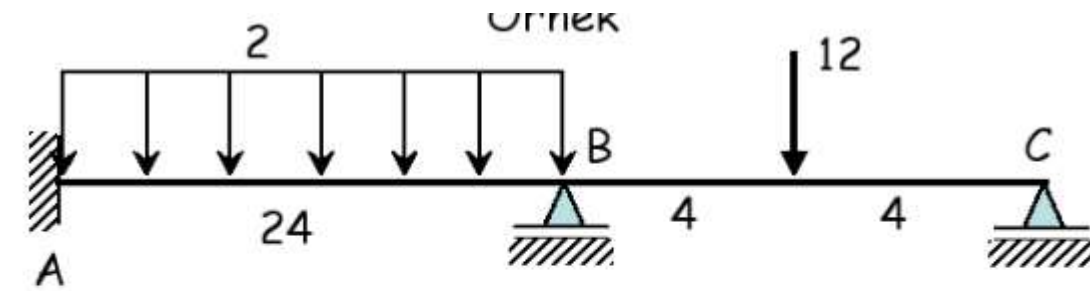
$$M_{BC} = 3E \frac{I}{L} (\theta_B - \phi) + (M_{BA}^F)^*$$

$$M_{BC} = 0$$



$$M_{BC} = 3E \frac{I}{L} (\theta_B - \phi) + (M_{BC}^F)^* \quad M_{BC} = 0$$

Bu denklemde BC çubuğundaki ankastrelik uç momentleri yazılırken bir ucu ankastre diğer ucu hareketli mesnet olan çubuklar için hazırlanan tablolar kullanılarak ankastrelik uç momentleri yazılır.



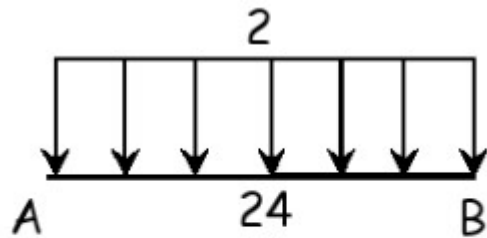
Problem çözülrken C noktasındaki momentin sıfır olması kullanılacaktır. Yani BC çubuğu için bir ucu hareketli mesnet olan sistemler için yazılan denklem kullanılacaktır. Böylece bilinmeyen sayısı 2 den 1 e düşecektir.

$$M_{AB} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M_{AB}^F$$

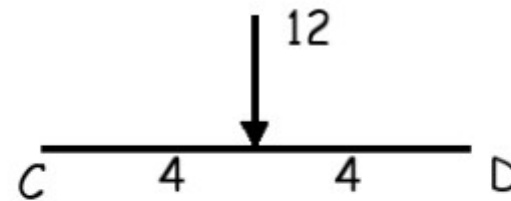
$$M_{BA} = 2E \frac{I}{L} (\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M_{BA}^F$$

$$M_{BC} = 3E \frac{I}{L} (\theta_B - \phi) + (M_{BC}^F)^*$$

$$M_{CB} = 0$$



$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{2 \cdot 24^2}{12} = 96$$



$$(M_{CD}^F)^* = \frac{3 \cdot P \cdot l}{16} = \frac{3 \cdot 12 \cdot 8}{16} = 18$$

$$M_{AB} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M_{AB}^F = 2E \frac{I}{24} (\theta_B) + 96$$

$$M_{BA} = 2E \frac{I}{L} (\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M_{BA}^F = 2E \frac{I}{24} (2\theta_B) - 96$$

$$M_{BC} = 3E \frac{I}{L} (\theta_B - \phi) + (M_{BC}^F)^* = 3E \frac{I}{8} (\theta_B) + 18$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 2E \frac{I}{24} (2\theta_B) + 96 + 3E \frac{I}{8} (\theta_B) + 18 = 0$$

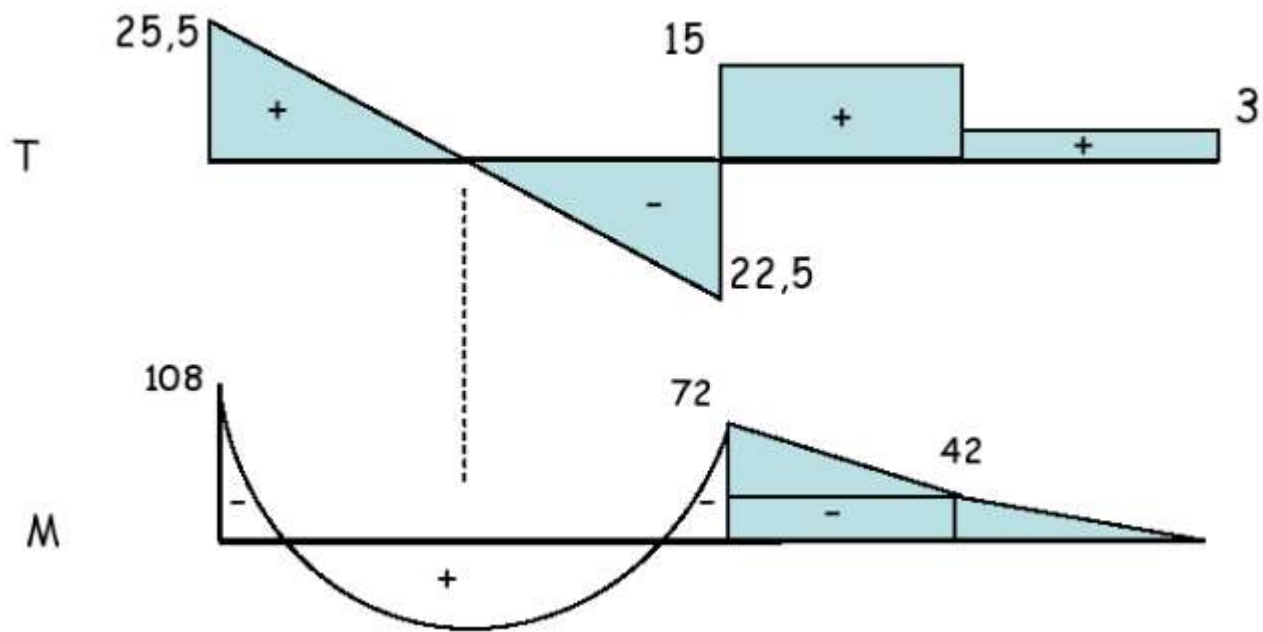
$$\theta_B = \frac{144}{EI}$$

$$M_{AB} = 2E \frac{I}{24} (\theta_B) + 96 = 2 * \frac{EI}{24} * \frac{144}{EI} + 96 = 108$$

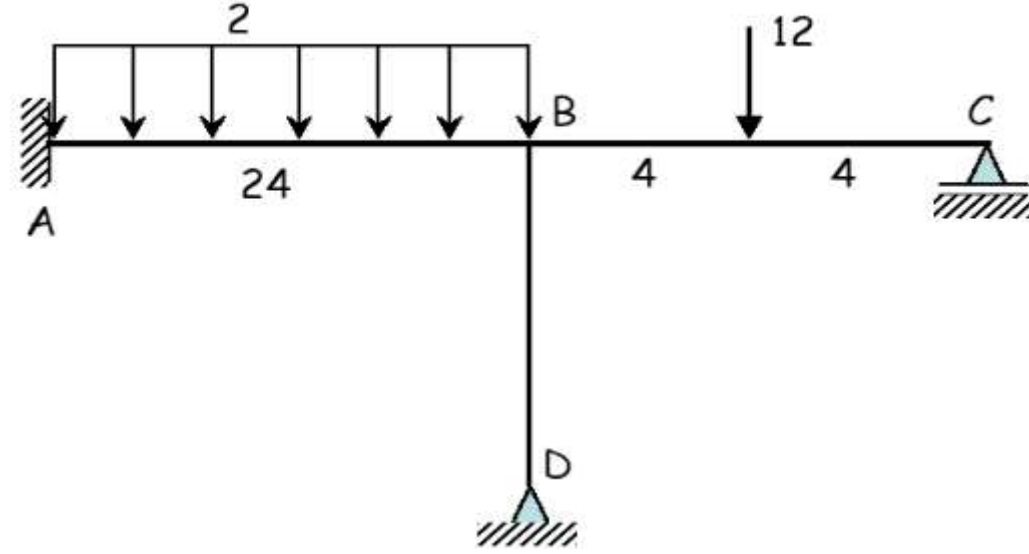
$$M_{BA} = 2 * \frac{EI}{24} (2 * \theta_B) - 96 = 2 * \frac{EI}{24} * (2 * \frac{144}{EI}) - 96 = -72$$

$$M_{BC} = 3 * \frac{EI}{8} (\theta_B) + 18 = 3 * \frac{EI}{8} (\frac{144}{EI}) + 18 = 72$$

$$M_{CB} = 0$$



Örnek 2:



Yukarıda özellikleri verilen sistemi açı metodu ile çözmek istersek A noktasındaki dönme sıfırdır ancak B, C ve D noktalarındaki dönmeler bilinmeyen olarak seçilip 3 denklem yazılarak çözüm yapılabilir.

Ancak eğer C ve D noktalarındaki momentlerin sıfır olması durumunu kullanmak istersek ve bu çubuklar için düzenlenmiş denklemleri ve ankastrelik uç momentlerini kullanırsak bilinmeyen olarak sadece B noktasındaki dönme değeri kalır. Böylece sadece tek bir bilinmeyen ile sistemin çözümü mümkün olabilmektedir.

Bu yüzden bazen normal açı denklemi yazılarak el ile çözülmesi oldukça zahmetli olacak sistemler için özel olarak düzenlenmiş denklemler ve ankastrelük uç momentlerini kullanarak çözüm oldukça kolay yapılabilmektedir.

DOĞRU EKSENLİ PRİZMATİK (EI, SABİT) ÇUBUKLARDA
ANKASTRELİK MOMENTLERİ

Yükleme			
	M_{ij}	M_{ji}	\bar{M}_{ij}
	$+\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{12}$	$+\frac{qL^2}{8}$
	$+\frac{Qab^2}{L^2}$	$-\frac{Qa^2b}{L^2}$	$+\frac{Qab}{2L^2}(L+b)$
	$+\frac{QL}{8}$	$-\frac{QL}{8}$	$+\frac{3QL}{16}$
	$+\frac{qL^2}{12}\left[1-\frac{a^2}{L^2}\left(2-\frac{a}{L}\right)\right]$	$-\frac{qL^2}{12}\left[1-\frac{a^2}{L^2}\left(2-\frac{a}{L}\right)\right]$	$+\frac{qL^2}{8}\left[1-\frac{a^2}{L^2}\left(2-\frac{a}{L}\right)\right]$
	$+\frac{5qL^2}{96}$	$-\frac{5qL^2}{96}$	$+\frac{5qL^2}{64}$
	$+\frac{qL^2}{20}$	$-\frac{qL^2}{30}$	$+\frac{qL^2}{15}$
	$+\frac{qL^2}{30}$	$-\frac{qL^2}{20}$	$+\frac{7qL^2}{120}$

ANKASTRELİK MOMENTLERİ TABLOSU

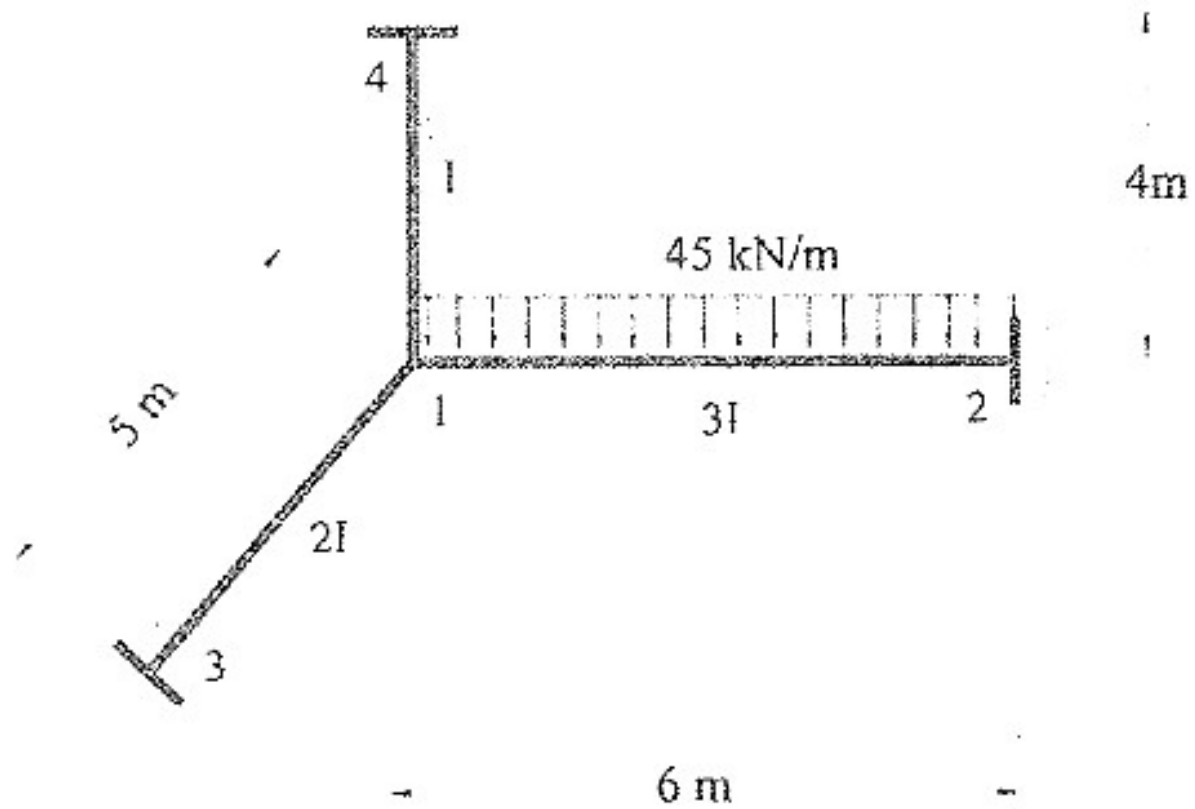
Yük	Ankastrelik Momentleri	Yük	Ankastrelik Momentleri
	$\mu_{q_1} = \frac{ql^2}{12}$ $\mu_{q_2} = -\frac{ql^2}{12}$		$\mu_{q_1} = \frac{q}{12} \left[l^2 - a^2 \left(2 - \frac{a}{l} \right) \right]$ $\mu_{q_2} = -\frac{q}{12} \left[l^2 - a^2 \left(2 - \frac{a}{l} \right) \right]$
	$\mu_{q_1} = \frac{qa^3}{4} \left[2 - \frac{a}{l} \left(\frac{3}{3} - \frac{a}{l} \right) \right]$ $\mu_{q_2} = -\frac{qa^3}{12l^2} (4l - 3a)$		$\mu_{q_1} = \frac{l^3}{60} (3q_1 + 2q_2)$ $\mu_{q_2} = -\frac{l^3}{60} (2q_1 + 3q_2)$
	$\mu_{q_1} = \frac{qc}{24l} (3l^2 - c^2)$ $\mu_{q_2} = -\frac{qc}{24l} (3l^2 - c^2)$		$\mu_{q_1} = \frac{ql^2}{15}$ $\mu_{q_2} = -\frac{ql^2}{15}$
	$\mu_{q_1} = \frac{qc}{12l^2} \left[4l^2 - c^2 \right] (2b - a) - 4(2b^3 - a^3)$ $\mu_{q_2} = -\frac{qc}{12l^2} \left[4l^2 - c^2 \right] (2a - b) - 4(2a^3 - b^3)$		$\mu_{q_1} = P a \frac{b^2}{l^2}$ $\mu_{q_2} = -P b \frac{a^2}{l^2}$ <p>Ozel hal: $a=b = \frac{l}{2}$, $\mu_{q_1} = \mu_{q_2} = -\frac{Pl}{8}$</p>
	$\mu_{q_1} = \frac{qa^2}{6l} (3l - 2a)$ $\mu_{q_2} = -\frac{qa^2}{6l} (3l - 2a)$		$\mu_{q_1} = \frac{Pa}{l} (l - a)$ $\mu_{q_2} = -\frac{Pa}{l} (l - a)$
	$\mu_{q_1} = \frac{5}{96} ql^2$ $\mu_{q_2} = -\frac{5}{96} ql^2$		$\mu_{q_1} = \frac{Pl}{12} \left(n - \frac{1}{n} \right)$ $\mu_{q_2} = -\frac{Pl}{12} \left(n - \frac{1}{n} \right)$
	$\mu_{q_1} = \frac{q}{180l} \left[7l^3 - 7l^2(a - 2b) + 3l(a^2 - 2b^2) + 3(a^3 - 2b^3) \right]$ $\mu_{q_2} = -\frac{q}{180l} \left[7l^3 + 7l^2(2b - a) - 3l(2a^3 - b^3) - 3(2a^3 - b^3) \right]$		$\mu_{q_1} = \frac{Pl}{12} \left(n + \frac{1}{2n} \right)$ $\mu_{q_2} = -\frac{Pl}{12} \left(n + \frac{1}{2n} \right)$
	$\mu_{q_1} = \frac{ql^2}{20}$ $\mu_{q_2} = -\frac{ql^2}{30}$		$\mu_{q_1} = M \frac{a}{l} \left(4 - 3 \frac{a}{l} - \frac{l}{a} \right)$ $\mu_{q_2} = -M \frac{a}{l} \left(3 \frac{a}{l} - 2 \right)$
	$\mu_{q_1} = \frac{qa^2}{12l} (2l - a)$ $\mu_{q_2} = -\frac{qa^2}{12l} (2l - a)$		$\mu_{q_1} = \frac{6EI}{l^2} \Delta$ $\mu_{q_2} = \frac{6EI}{l^2} \Delta$

ANKASTRELİK MOMENTLERİ TABLOSU

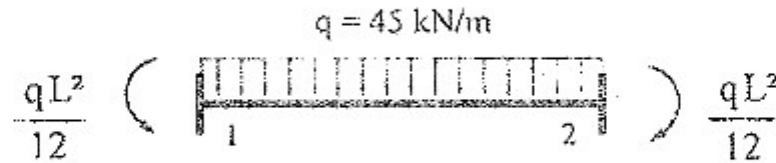
Yük	Ankastrelık Momentleri	Yük	Ankastrelık Momentleri
	$\mu_q = \frac{ql^2}{8}$		$\mu_q = \frac{q}{8} \left[l^2 - a^2 \left(2 - \frac{a}{l} \right) \right]$
	$\mu_q = \frac{qa^2}{8} \left(2 - \frac{a}{l} \right)^2$		$\mu_q = \frac{l^2}{120} (8q_1 + 7q_2)$
	$\mu_q = \frac{qc}{16l} (3l^2 - c^2)$		$\mu_q = \frac{ql^2}{10}$
	$\mu_q = \frac{qbc}{9l^2} [a(l^2 - b^2) - c^2]$		$\mu_q = \frac{Pab(b+l)}{2l^2}$ Özel hal: $a=b = \frac{l}{2}$, $\mu_q = \frac{3}{16} Pl$
	$\mu_q = \frac{qa^2}{4l} (3l - 2a)$		$\mu_q = \frac{3}{2} Pa \left(1 - \frac{a}{l} \right)$
	$\mu_q = \frac{5}{64} ql^2$		$\mu_q = \frac{Pl}{8} \left(n - \frac{1}{n} \right)$
	$\mu_q = \frac{ql^2}{120} \left(l + b \left(7 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right) \right)$		$\mu_q = \frac{Pl}{8} \left(n + \frac{1}{2n} \right)$
	$\mu_q = \frac{ql^2}{15}$		$\mu_q = M \frac{a}{l} \left(3 - \frac{3a}{2l} - \frac{l}{a} \right)$
	$\mu_q = \frac{qa^2}{9l} (2l - a)$		$\mu_q = \frac{3EI}{l^2} \delta$

"i" ucu mesafeli, "j" ucu ankastre mesnet olmayan durumlarda $\mu_q=0$ olur. μ_q ler ise "a" ankastre mesnetten olan uzaklığı göstermek üzere, yukarıdaki formüllerde bulunan değerlerin negatif işaretlerine eşittir.

Örnek 3:



ii. Ankastrelik uç kuvvetleri



$$M_{12} = \frac{qL^2}{12} = \frac{45 \times 6^2}{12} = 135 \text{ kNm}, \quad M_{21} = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{45 \times 6^2}{12} = -135 \text{ kNm}$$

iii. Birim yerdeğiştirme sabitleri

Çubuk i-j	$m_{1\theta_i}$	$m_{1\theta_j}$
1-3	$4E(2I) / 5$ 1.60EI	$2E(2I) / 5$ 0.80EI
1-4	$4E(I) / 4$ 1.00EI	$2E(I) / 4$ 0.50EI
1-2	$4E(3I) / 6$ 2.00EI	$2E(3I) / 6$ 1.00EI

iv. Denge denklemleri

$$\sum M_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_{13} + M_{12} + M_{14} = 0$$

$$M_{13} = m_{1\theta_1}^{13} \times \theta_1, \quad M_{14} = m_{1\theta_1}^{14} \times \theta_1, \quad M_{12} = \mathcal{M}_{12} + m_{1\theta_1}^{12} \times \theta_1$$

$$(m_{1\theta_1}^{13} + m_{1\theta_1}^{14} + m_{1\theta_1}^{12}) \times \theta_1 + \mathcal{M}_{12} = 0$$

$$(1.60EI + 1.00EI + 2.00EI) \times \theta_1 + 135 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 = -29.35/EI \quad [\text{rad}]$$

v. Düğüm noktalarına komşu çubuk kesitlerindeki uç momentleri

$$M_{13} = m_{1\theta_1}^{13} \times \theta_1 = 1.6 EI \times (-29.35/EI) = -46.96 \quad \text{kNm}$$

$$M_{14} = m_{1\theta_1}^{14} \times \theta_1 = 1.0 EI \times (-29.35/EI) = -29.35 \quad \text{kNm}$$

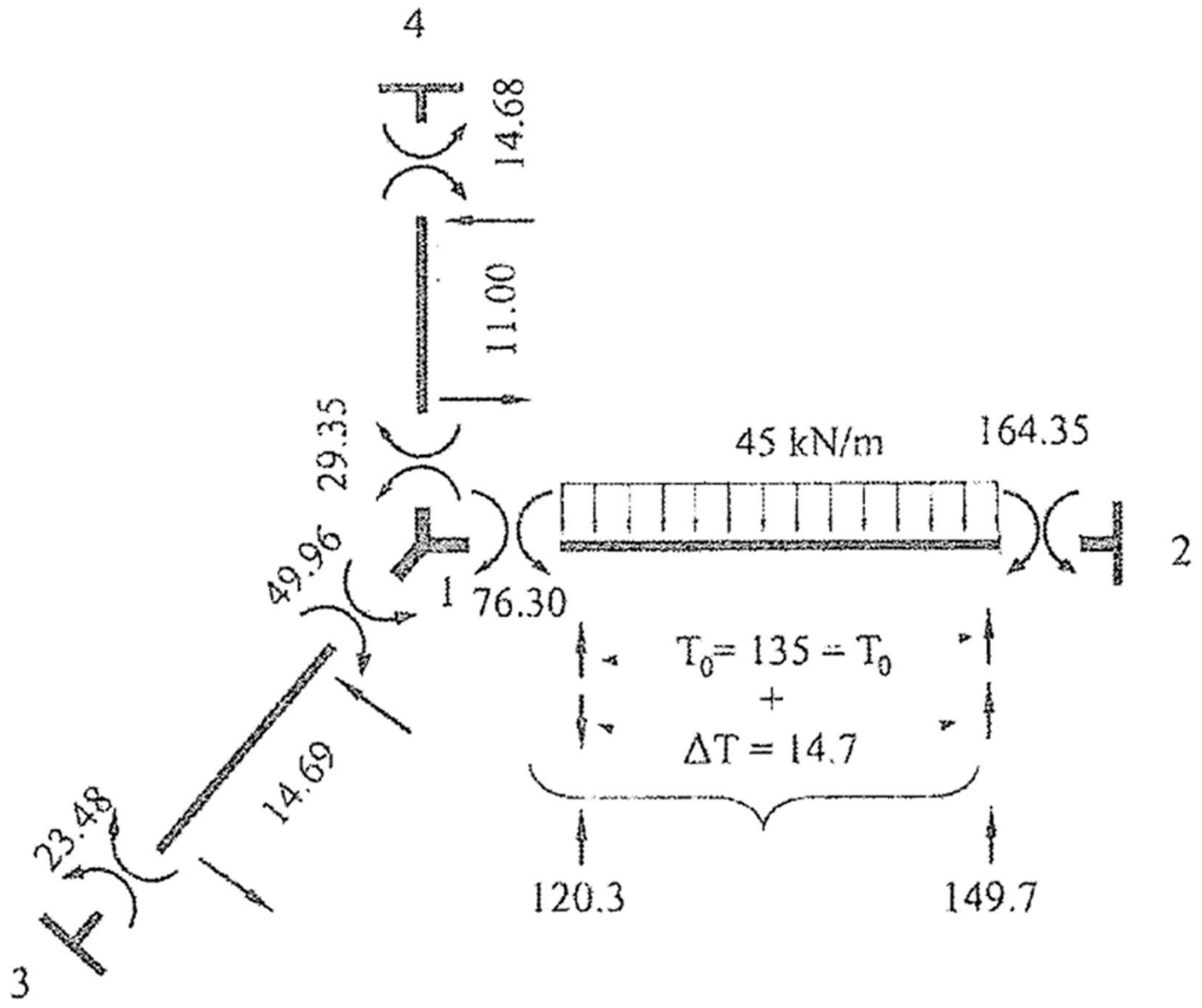
$$M_{12} = \mathcal{M}_{12} + m_{1\theta_1}^{12} \times \theta_1 = 135 + 2.0 EI \times (-29.35/EI) = 76.30 \quad \text{kNm}$$

vi. Karşı uçlardaki momentler – Mesnet momentleri

$$M_{31} = m_{3\theta_1}^{31} \times \theta_1 = 0.8 EI \times (-29.35/EI) = -23.48 \text{ kNm}$$

$$M_{41} = m_{4\theta_1}^{41} \times \theta_1 = 0.5 EI \times (-29.35/EI) = -14.68 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = P_{12} + m_{2\theta_1}^{21} \times \theta_1 = -135 + 1.0 EI \times (-29.35/EI) = -164.35 \text{ kNm}$$



viii. *M eğilme momenti ve T kesme kuvveti diyagramları*

