YAPI STATİĞİ II

KUVVET METODU_UYGULAMA

Hazırlayan: Yard.Doç.Dr.Kıvanç TAŞKIN

TANIM

Düzlem Hiperstatik sistemlerin sabit yükler,sıcaklık değişimi ve mesnet çökmesi gibi dış etkilerlerden dolayı oluşan kesit tesirleri ve yer değiştirmelerini bulmaya yarayan virtuel iş ilkesine dayalı çözüm yöntemidir.

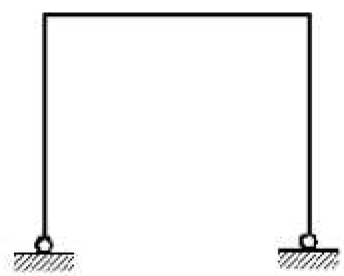
Kuvvet metodu ile çözüm yapılırken yapılacak ilk iş izostatik esas sistemin seçilmesidir.

İzostatik esas sistem, hiperstatik sistemde hiperstatiklik derecesi kadar bilinmeyenin belirlenmesi ile elde edilir. Hiperstatik sistemde hangi bilinmeyenlerin hesaplanacağı belirlenerek sistem izostatik hale getirilir.

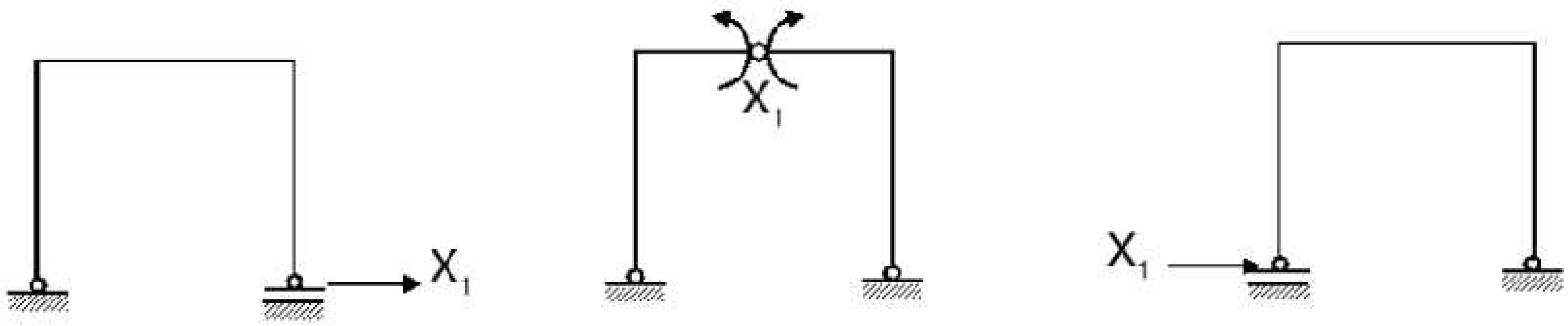
İzostatik Esas Sistem: Hiperstatik sistem izostatik hale getirilir. Bunu yaparken ya sisteme mafsal yerleştirilir yada mesnetlerdeki serbestlikler arttırılır. İzostatik esas sitem seçilirken hangi sistemi daha kolay çözebileceğimizi düşünüyorsak o sistemi seçebiliriz. Bir hiperstatik sistemin pek çok izostatik esas sistemi vardır.

İzostatik esas sistem belirlenirken mesnetlenme durumu izostatik hale getirilir bu arada serbest bırakılan her mesnet reaksiyonu için bir bilinmeyen yazılır veya sisteme mafsal yerleştirilerek mafsalın olduğu yerde bilinmeyen olarak moment yazılır.

1. Dereceden hiperstatik sistem

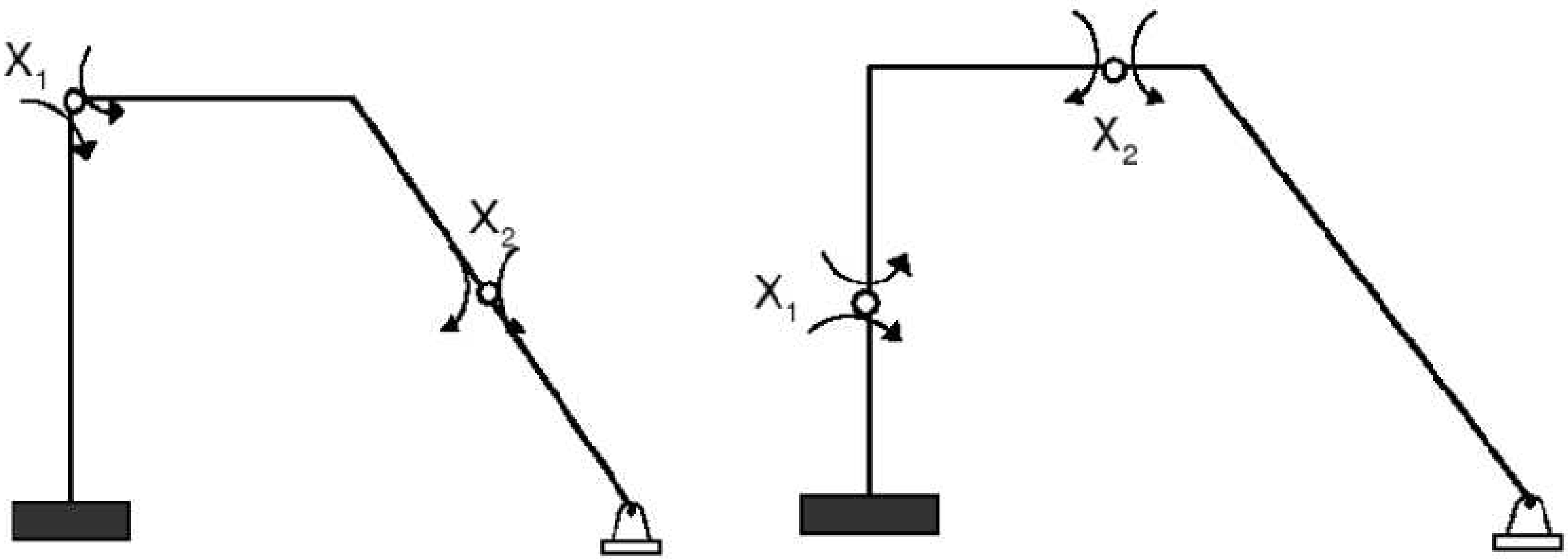


İzostatik Esas Sistem

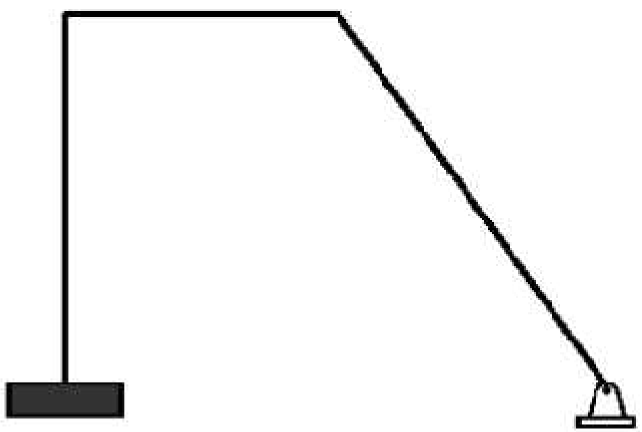


İzostatik esas sistem belirlenirken aynı zamanda hesap edilecek bilinmeyenlerde seçilmiş olmaktadır. Bu yüzden izostatik esas sistem belirlenirken hesaplarda kolaylık sağlayacak sistemlerin seçilmesine çalışılır. Yani izostatik esas sistem ve bilinmeyenlerin birim yüklemeleri için yapılacak hesapların daha kolay yapılabileceği sistemler izostatik sistem olarak seçilmeye çalışılır.

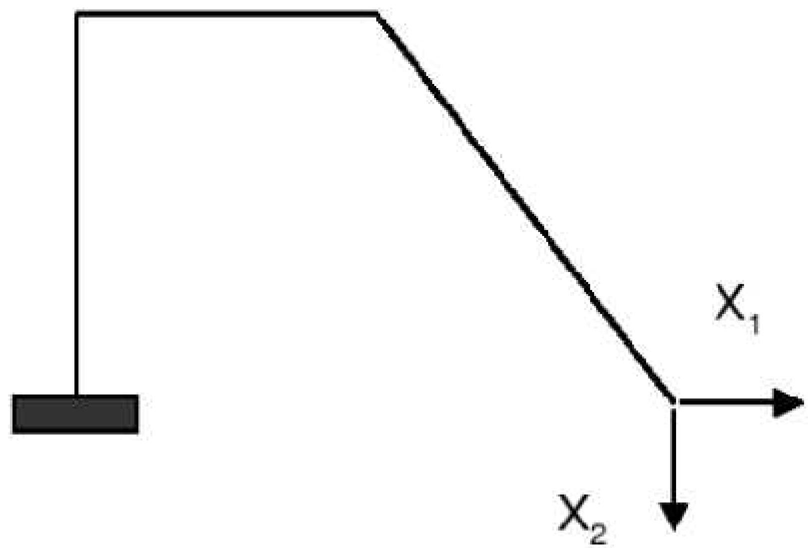
Mafsal eklenmesi durumunda mafsalın her iki yanına bilinmeyen olarak moment yazılır.



Mesnetlenme durumunun değiştirilmesi durumunda ise hangi yönde serbestlik arttırılırsa o yönde yönde bilinmeyen kuvvet veya moment yazılır.

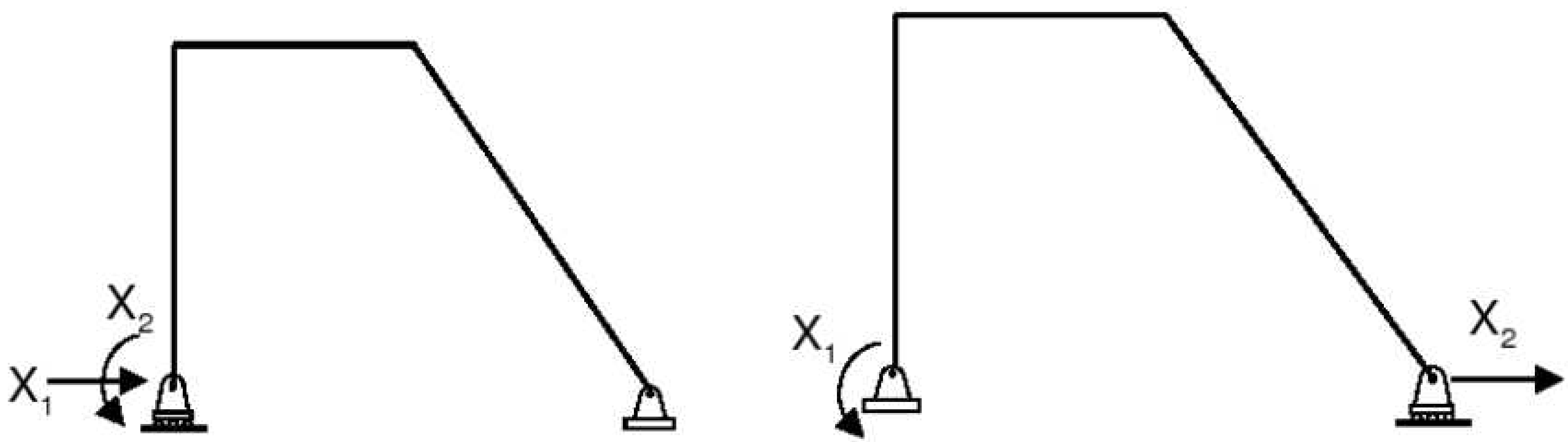


2. Dereceden hiperstatik sistem



İzostatik esas sistem

2. Dereceden hiperstatik sistem için izostatik esas sistemler



Kuvvet Yöntemine göre Hiperstatik sistemdeki etkiler,

İzostatik esas sistemdeki etkiler ile X_1, X_2,……,X_n bilinmeyen kuvvetlerin oluşturduğu etkilerin uygun şekilde birleştirilmesiyle bulunur. X_1, X_2,……,X_n bilinmeyenlerinin bulunması hiperstatik sistemdeki etkilerin bulunması için şarttır. Bilinmeyen sayısı sistemin hiperstatiklik derecesi kadardır.

Kuvvet Yöntemine göre Hiperstatik sistemdeki etkiler hesaplanırken, hiperstatiklik derecesi belirlenip izostatik esas sistem seçildikten sonra sistem uygunluk denklemi yazılır.

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{1n}X_n$$
$$\delta_2 = \delta_{2w} + \delta_{2t} + \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{2n}X_n$$
$$\delta_3 = \delta_{3w} + \delta_{3t} + \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{3n}X_n$$
$$\vdots$$
$$\delta_n = \delta_{nw} + \delta_{nt} + \delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{nn}X_n$$

Uygunluk denklemi hiperstatiklik derecesi kadar yazılır.

Sistem 1 dereceden hiperstatik ise denklem 1 tanedir

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

Sistem 2. dereceden hiperstatik ise denklem 2 tane olacaktır

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{2w} + \delta_{2t} + \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$

Sistem 3. dereceden hiperstatik ise denklem 3 tane olacaktır

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3$$
$$\delta_2 = \delta_{2w} + \delta_{2t} + \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3$$
$$\delta_3 = \delta_{3w} + \delta_{3t} + \delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3$$

Sistemde sıcaklı değişimi ve mesnet çökmesi yok ise sadece dış yük etkisi var ise denklem şu hale gelir:

$$\delta_1 = \cancel{\delta_{1w}} + \cancel{\delta_{1t}} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

Sistem 2. dereceden hiperstatik ise denklem 2 tane olacaktır

$$\delta_1 = \cancel{\delta_{1w}} + \cancel{\delta_{1t}} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \cancel{\delta_{2w}} + \cancel{\delta_{2t}} + \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$

Sistem 3. dereceden hiperstatik ise denklem 3 tane olacaktır

$$\delta_1 = \cancel{\delta_{1w}} + \cancel{\delta_{1t}} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3$$
$$\delta_2 = \cancel{\delta_{2w}} + \cancel{\delta_{2t}} + \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3$$
$$\delta_3 = \cancel{\delta_{3w}} + \cancel{\delta_{3t}} + \delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3$$

Uygunluk denkleminde görülen deplasman ifadelerinin altındaki ilk indis yeri, ikinci indis ise sebebi göstermektedir.

δ_i i yönündeki deplasman

δ_{iw} i yönünde mesnet çökmesinden dolayı oluşan deplasman değeri

δ_{it} i yönünde sıcaklık değişiminden dolayı oluşan deplasman değeri

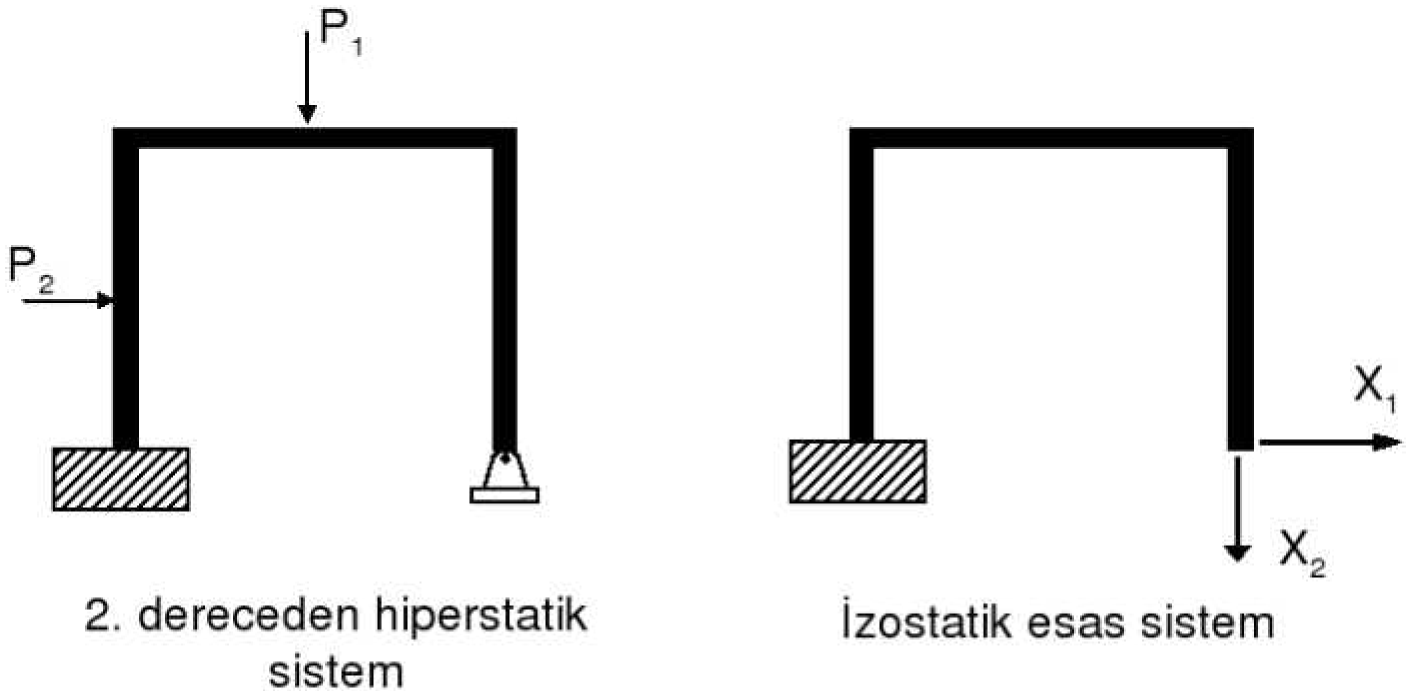
δ_{i0} i yönünde dış yükten oluşan deplasman değeri

δ_{i1} i yönünde 1 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan deplasman değeri

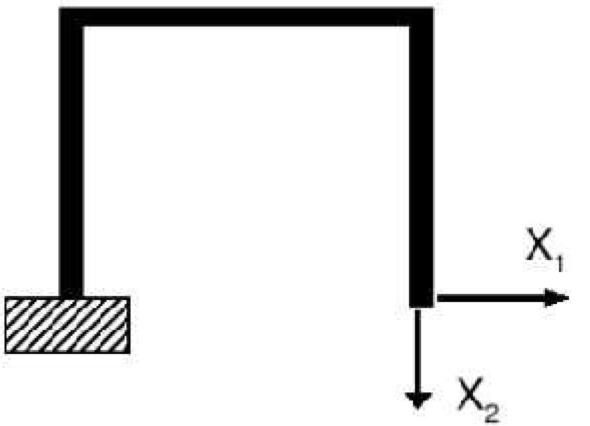
δ_{i2} i yönünde 2 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan deplasman değeri

$\vdots$

δ_{in} i yönünde n nolu birim yüklemeden dolayı oluşan deplasman değeri



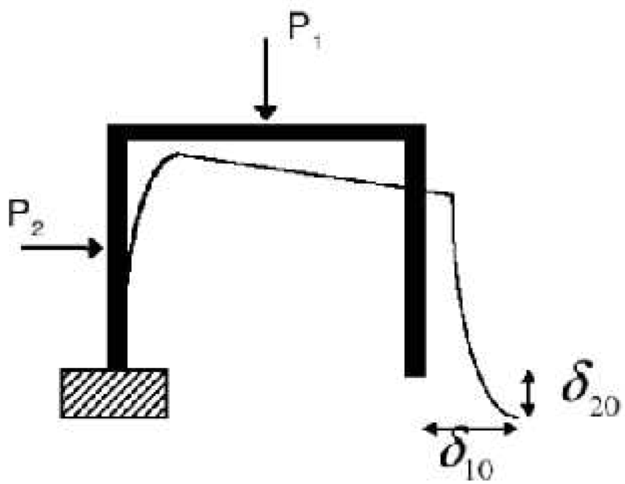
Kuvvet metodu ile çözüm yapılırken hiperstatiklik derecesi belirlenip izostatik esas sistem belirlendikten sonra uygunluk denklemleri yazılır. Bundan sonra uygunluk denklemindeki değerleri bulmak sırasıyla yüklemeler yapılır.

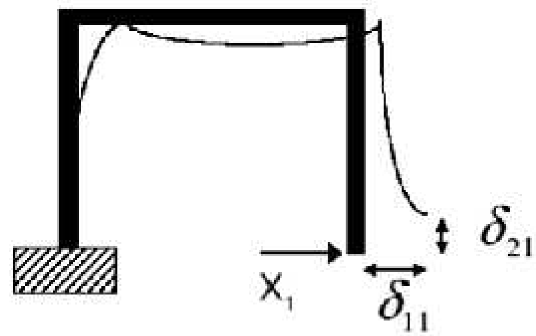


Sistem 2. dereceden hiperstatik ise

denklem 2 tane olacaktır

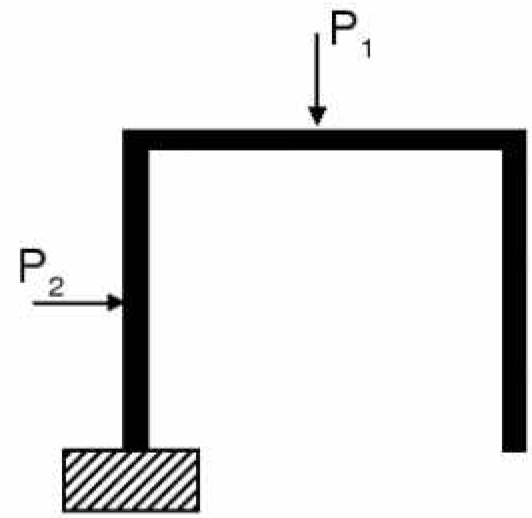
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$





X_0 Yüklemesi

İzostatik esas sisteme dış yük yüklenerek sistemde oluşan M_0 N_0 T_0 değişim diyagramları çizilir.



- **X_0 Yüklemesi**

İzostatik esas sistemde sadece dış yük etkisinde M, N, T kesit tesirleri diyagramları çizilir.

M_0 : İzostatik esas sistemde dış etkilerden dolayı oluşan moment

N_0 : İzostatik esas sistemde dış etkilerden dolayı oluşan normal kuvvet

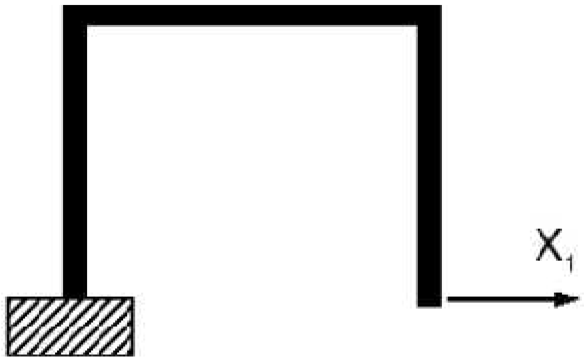
T_o : İzostatik esas sistemde dış etkilerden dolayı oluşan kesme kuvveti.

•Birim Yüklemeler

İzostatik esas sistemde, sırasıyla seçilen her bir bilinmeyen için birim yüklemeler yapılır.

$$X_1=1\ ,\ X_2=1\ ,\ X_3=1\ ,\ldots\ldots\ldots,\ X_n=1$$

Bu durumda her bir birim yükleme için sistem kesit tesirleri (M, N, T) çizilir. Bu kesit tesirleri hesaplanırken sistemde dış yük yoktur.



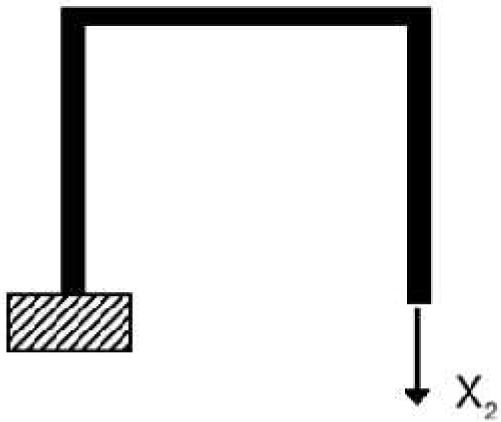
X_1 Yüklemesi

İzostatik esas sistemde sadece 1 nolu bilinmeyen yönünde birim yükleme yapılması durumu. Bu durumda izostatik esas sistemde oluşacak

M_1 : İzostatik esas sistemde 1 nolu birim yüklemeden etkilerden dolayı oluşan moment

N_1 : İzostatik esas sistemde 1 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan normal kuvvet

T_1 : İzostatik esas sistemde 1 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan kesme kuvveti.



İzostatik esas sistem

X_2 Yüklemesi

İzostatik esas sistemde sadece 2 nolu bilinmeyen yönünde birim yükleme yapılması durumu. Bu durumda izostatik esas sistemde oluşacak

M_2 : İzostatik esas sistemde 2 nolu birim yüklemeden etkilerden dolayı oluşan moment

N_2 : İzostatik esas sistemde 2 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan normal kuvvet

T_2 : İzostatik esas sistemde 2 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan kesme kuvveti.

Uygunluk denklemindeki deplasman ifadelerinin bulunması için mukavemette görülen virtuel iş teoremi kullanılır. Dolu gövdeli sistemler için bu ifade şu şekildedir:

$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} + \int N_i N_j \frac{ds}{EF} + \int T_i T_j \frac{ds}{GF'}$$

Bu denklemde görülen

EI= Eğilme Rijitliği

EF= Uzama Rijitliği

GF'= Kayma Rijitliği , ifadeleridir.

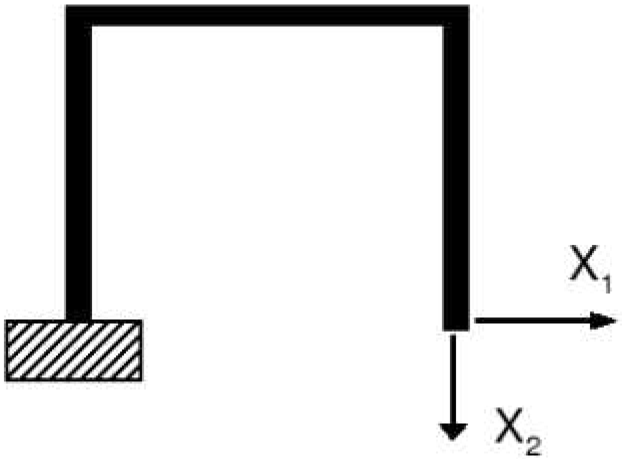
Deplasman ifadelerinin simetri özelliği vardır. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

Mesela 12 deplasmanı ile 21 deplasmanı birbirine eşittir ve şu denklemle bulunur:

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

$$\delta_{12} = \int M_1 M_2 \frac{ds}{EI} + \int N_1 N_2 \frac{ds}{EF} + \int T_1 T_2 \frac{ds}{GF'}$$

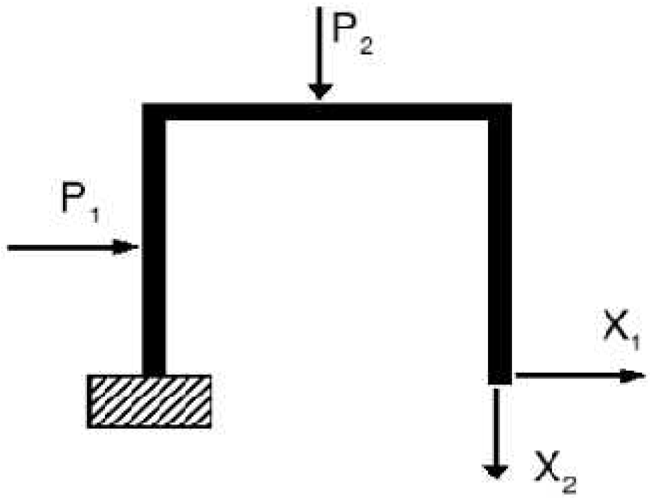
Bu deplasmanların bulunması sırasında genellikle N ve T kesme ifadeleri ihmal edilir. Moment ifadeleri de matematiksel olarak yazılır ve uzunluk boyunca integral alınır.



Deplasman ifadeleri hesaplandıktan sonra aşağıdaki uygunluk denkleminde yerine konarak denklem takımı çözülür ve bilinmeyenler olarak seçilen X_1 ve X_2 reaksiyon kuvvetleri bulunur.

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$

$\Rightarrow$ X_1, X_2



Bundan sonra hesaplanan X değerleri kullanılarak hiperstatik sistemde oluşacak kesit tesirleri bulunabilir. Bunun için hesaplanan X değerleri dış yükler ile sisteme etki ettirilir.

Yada süperpozisyon denklemleri yazılarak daha önce çizilen M,N,T diyagramları kullanılarak hiperstatik sistemin kesit tesirleri hesaplanır.

Sistemde herhangi bir noktadaki kesit tesirlerini hesaplamak için

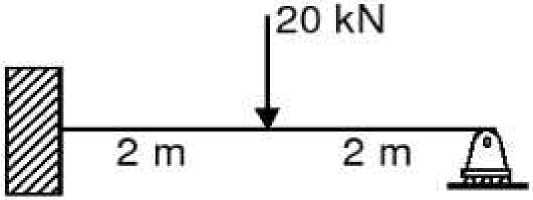
$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 + \ldots\ldots + M_n X_n$

$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + \ldots\ldots + T_n X_n$

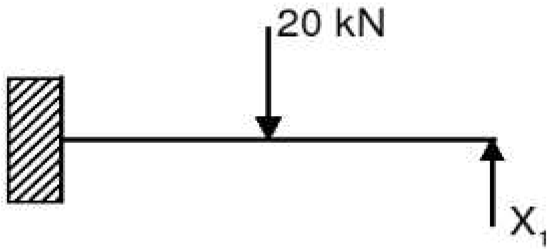
$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + \ldots\ldots + N_n X_n$

Süperpozisyon denklemleri kullanılabilir. Bu denklemler yardımıyla sistemde istenilen noktadaki kesit tesirleri hesaplanabilir.

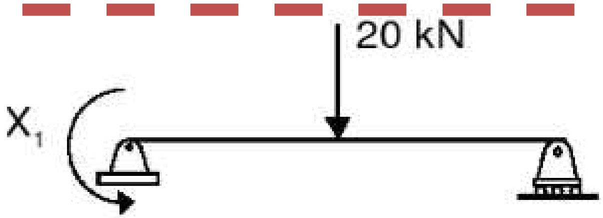
ÖRNEK 1



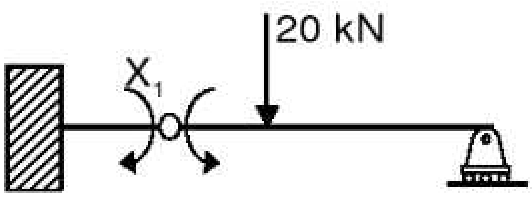
Hiperstatik sistem (1. dereceden)



İzostatik esas sistem



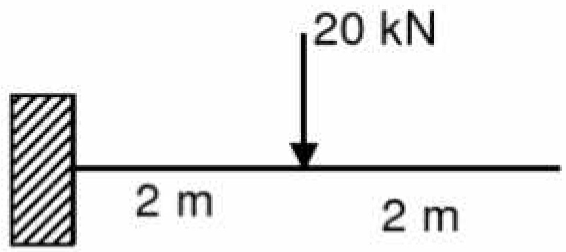
İzostatik esas sistem



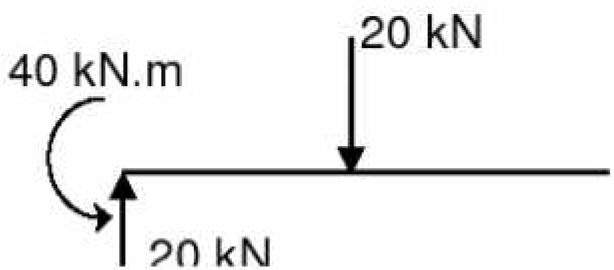
İzostatik esas sistem

1. Dereceden hiperstatik olduğu için uygunluk denklemi

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

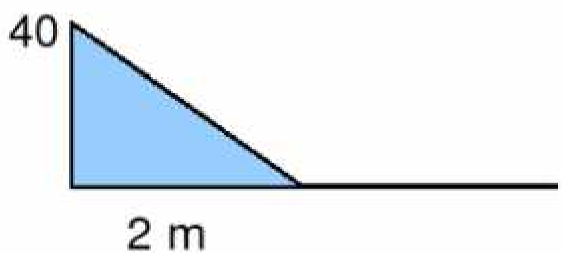


X_0 Yüklemesi

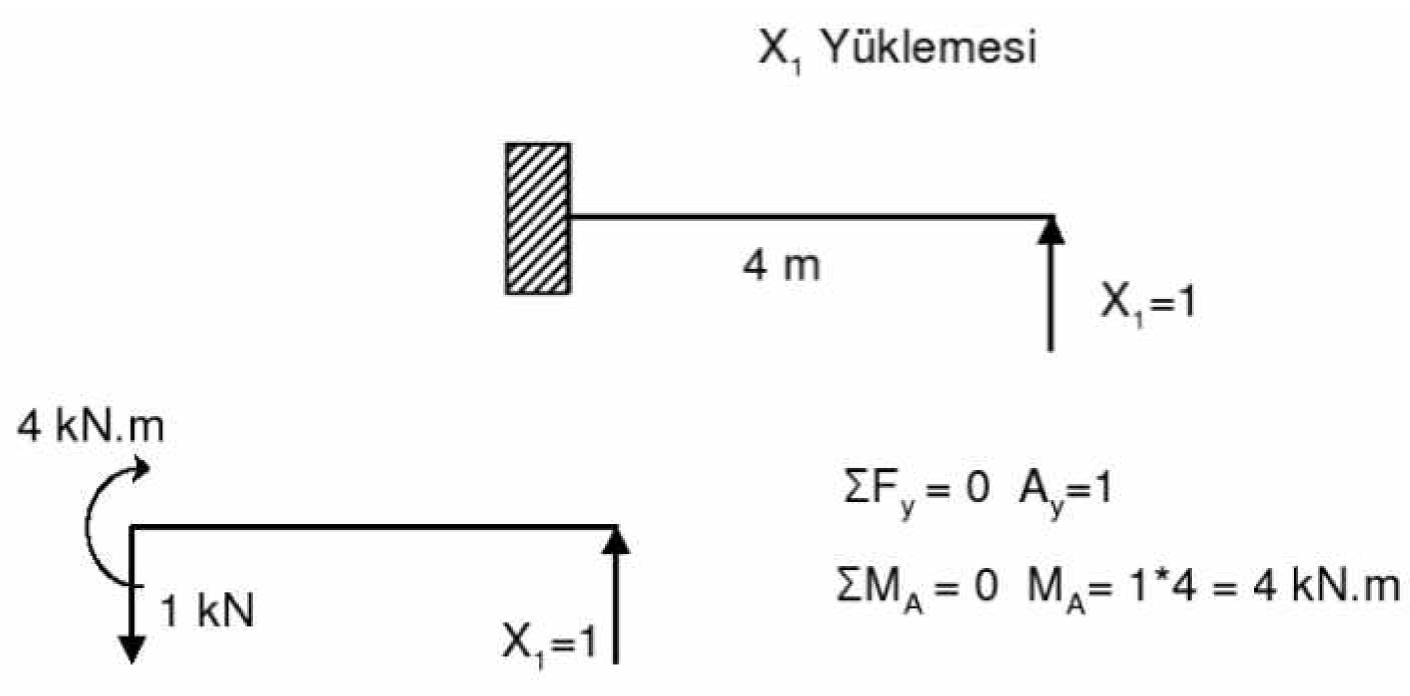


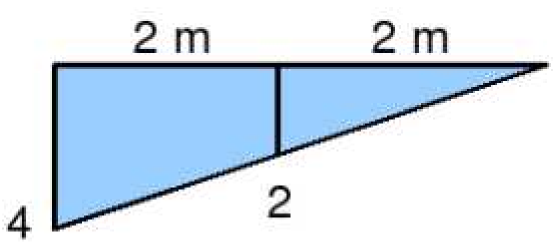
$\Sigma F_y = 0 \quad A_y = 20$

$\Sigma M_A = 0 \quad M_A = 20 * 2 = 40$ kN.m



M_0 Diyagramı





M_1 Diyagramı

Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD)

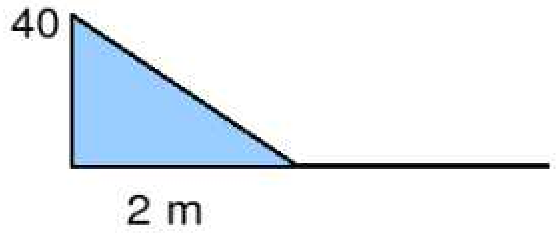
$$\Rightarrow \boxed{\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \delta_{i3}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{in}X_n + \delta_{i0} = 0} \quad (i=1, 2, 3,\ldots\ldots, n)$$

i=1, 2, 3,......, n için bu denklemler açık şekilde yazılırsa;

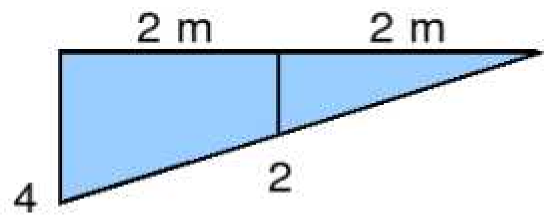
$$
\begin{array}{l}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0 \\
\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{3n}X_n + \delta_{30} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0
\end{array}
$$

olarak **Açık Süreklilik Denklemleri** elde edilir.

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_0 Diyagramı



M_1 Diyagramı

$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

$$EI\,\delta_{10} = \int_0^2 (2+x).(-20x)dx$$

$$EI\,\delta_{10} = -133.333$$

$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

$$EI\,\delta_{11} = \int_0^4 (x).(x)dx$$

$$EI\,\delta_{11} = 64 \backslash 3 = 21.333$$

İZOSTATİK SİSTEMLERDE ŞEKİLDEĞİŞTİRME VE YERDEĞİŞTİRMELERİN HESABI

$\int \frac{M\overline{M}}{EI} ds$ Çarpım integrallerinin hesabı

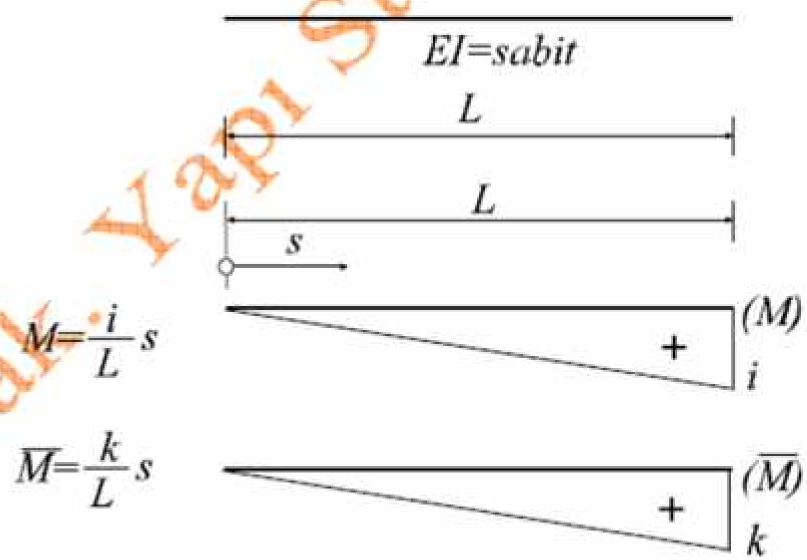
Verilen dış yüklerden meydana gelen M diyagramının ve yerdeğiştirme aranan noktaya yerdeğiştirme doğrultusunda yapılan birim yüklemeden meydana gelen $\overline{M}$ diyagramının her bölgedeki fonksiyonları elde edilmiş ise $\int \frac{M\overline{M}}{EI} ds$ çarpım integrali analitik yoldan hesaplanır. Ancak çok kez olduğu gibi eğilme momenti diyagramları nokta nokta çizilmiş ise çarpım integrallerinin hesabı analitik olarak yapılamaz . Bu durumda bu integrallerin hesabı için çarpım tablolarından yararlanılabilir.

Çarpım Tabloları

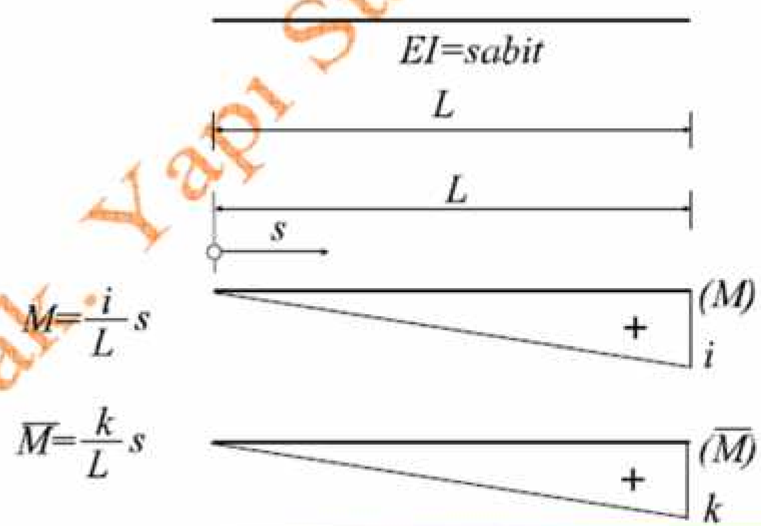
⇒ **Doğru eksenli prizmatik çubuklar**

Çubuk ekseni doğrusal ve eğilme rijitliği (EI) sabit olan çubuklardır. Bu çubuklarda,

EI=sabit olduğu için $\int M\overline{M}\,\dfrac{ds}{EI} = \dfrac{1}{EI}\int M\overline{M}\,ds$ yazılabilir.



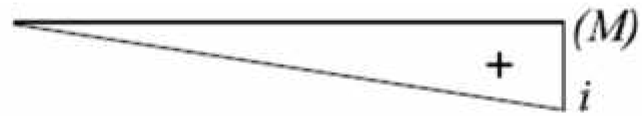
EI=sabit olduğu için $\int M\overline{M}\,\dfrac{ds}{EI} = \dfrac{1}{EI}\int M\overline{M}\,ds$ yazılabilir.



Eğilme momenti diyagramlarının uygulamada çok karşılaşılan şekilleri için bu integraller hesaplanarak sonuçlar tablo halinde verilmiştir. Örneğin yükseklikleri aynı tarafta olan iki üçgen eğilme momenti diyagramının çarpım integrali analitik olarak yapılırsa; için;

$\int M\overline{M}\,\dfrac{ds}{EI} = \int_{s=0}^{s=L}\left(\dfrac{i}{L}s\right)\left(\dfrac{k}{L}s\right)ds = \dfrac{ik}{L^2}\left|\dfrac{s^3}{3}\right|_{s=0}^{s=L} = \dfrac{1}{3}Lik$ elde edilir. Aynı ifade çarpım

$M = \frac{i}{L} s$



$\overline{M} = \frac{k}{L} s$

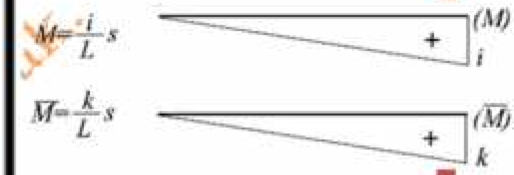
Eğilme momenti diyagramlarının uygulamada çok karşılaşılan şekilleri için bu integraller hesaplanarak sonuçlar tablo halinde verilmiştir. Örneğin yükseklikleri aynı tarafta olan iki üçgen eğilme momenti diyagramının çarpım integrali analitik olarak yapılırsa; için;

$\int M\overline{M}\frac{ds}{EI} = \int_{s=0}^{s=L}\left(\frac{i}{L}s\right)\left(\frac{k}{L}s\right)ds = \frac{ik}{L^2}\left|\frac{s^3}{3}\right|_{s=0}^{s=L} = \frac{1}{3}Lik$ elde edilir. Aynı ifade çarpım tablosundan da yükseklikleri aynı tarafta olan iki üçgen diyagramın çarpım integrali için $\frac{1}{3}Lik$ elde edilir. Çarpım tablosunun kullanılırken: Çarpılacak diyagramlar tabloda bulunarak bunların ait oldukları satır ve kolonun kesim noktasından integralin sonucu alınır.

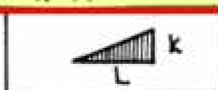
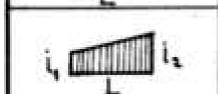
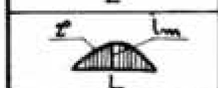
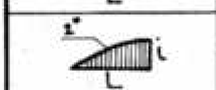
$$\int M\overline{M}\frac{ds}{EI} = \int_{s=0}^{s=L}\left(\frac{i}{L}s\right)\left(\frac{k}{L}s\right)ds = \frac{ik}{L^2}\left|\frac{s^3}{3}\right|_{s=0}^{s=L} = \boxed{\frac{1}{3}Lik}$$

elde edilir. Aynı ifade çarpım tablosundan da yükseklikleri aynı tarafta olan iki üçgen diyagramın çarpım integrali için $\frac{1}{3}Lik$ elde edilir. Çarpım tablosunun kullanılırken: Çarpılacak diyagramlar tabloda bulunarak bunların ait oldukları satır ve kolonun kesim noktasından integralin sonucu alınır.

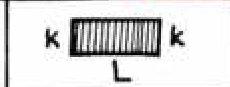
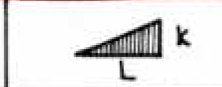
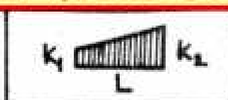
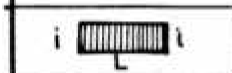
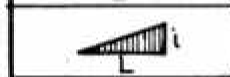
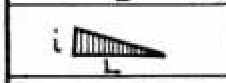
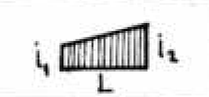
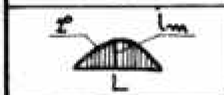
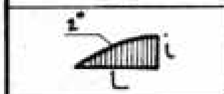
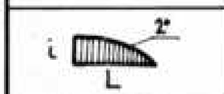
44



ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k ds$

							
	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\boxed{\frac{1}{3}Lik}$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$
	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1+\beta)i_1+(1+\alpha)i_2]$
	$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{7}{15}Li_mk$	$\frac{1}{5}Li_mk$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)i_mk$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\alpha-\alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\beta+\beta^2)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}Li[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k \, ds$

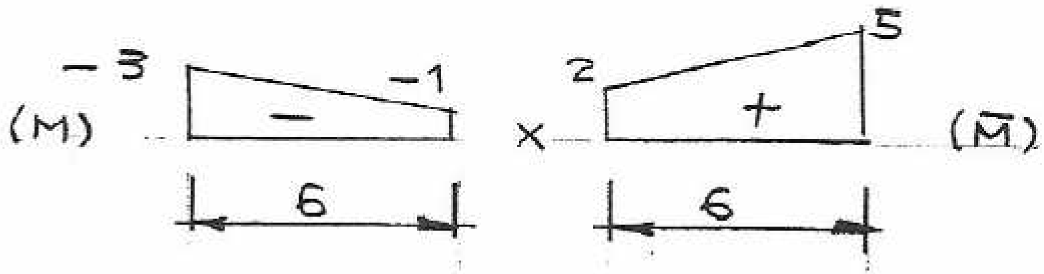
							
	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$
	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1+\beta)i_1+(1+\alpha)i_2]$
	$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{7}{15}Li_mk$	$\frac{1}{5}Li_mk$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)i_mk$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\alpha-\alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\beta+\beta^2)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}Li[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

Çarpım tablosunun kullanılırken: Çarpılacak diyagramlar tabloda bulunarak bunların ait oldukları satır ve kolonun kesim noktasından integralin sonucu alınır.

- **Çarpım tablosunun kullanılmasında dikkat edilecek hususlar:**

1) Trapez diyagramlarda i_1, k_1 soldaki, i_2, k_2 ise sağdaki ordinatları göstermektedir. Bu diyagramlara ait çarpım ifadeleri, $i_1 < i_2$ $(k_1 < k_2)$ ve $i_1 > i_2$ $(k_1 > k_2)$ hallerinin her ikisi için de geçerlidir.

- **Örnek:**



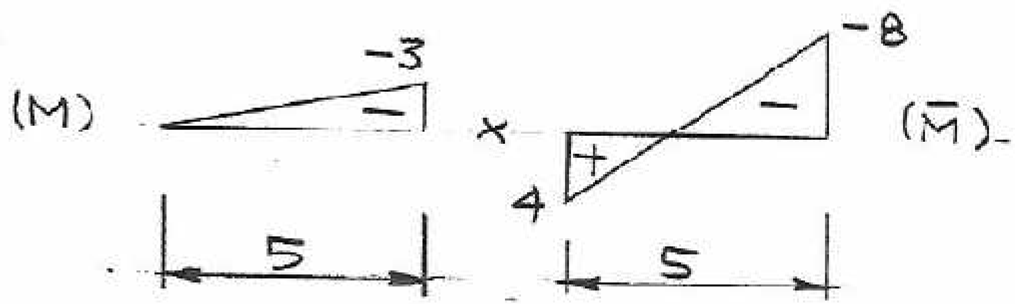
$$\int M\bar{M}\,ds = \frac{1}{6}\,6\,[2\times(-3)\times 2 + (-3)\times 5 + (-1)\times 2 + 2\times(-1)\times 5]$$
$$= -39$$

ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k\, ds$					
	k k, L	k, L	k_1 k_2, L	2° k_m, L	2° k, L
i i, L	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$
i, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$
i, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$
i_1 i_2, L	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$

Hatırlatma :

2) Çarpımlarda ordinatların cebrik değerleri kullanılacaktır. Böylece tablolar, ordinatları ters işaretli olan trapez diyagramların çarpımı için de kullanılabilmektedir.

- Örnek :

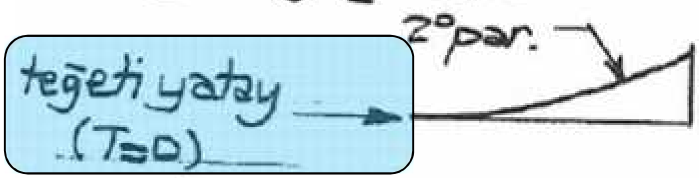


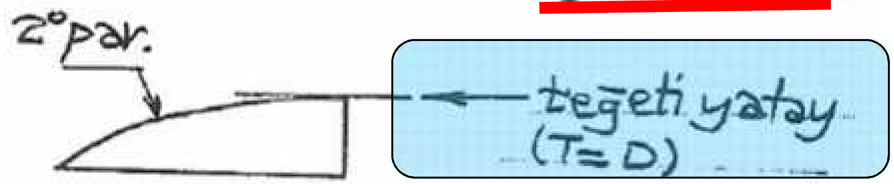
$$\int M\bar{M}\,ds = \frac{1}{6}5\times(-3)\,[\,4+2(-8)\,] = 30$$

ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k\, ds$

	k k, L	k, L	k_1 k_2, L	i°, k_m, L	i°, k, L
i i, L	Lik	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}$ Lik
i, L	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{3}$ Lik	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}$ Lik
i, L	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{6}$ Lik	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}$ Lik

3) Yarım parabol diyagramlara ait çarpım ifadeleri, bu diyagramların bir uçtaki teğetlerinin yatay olması halinde (yani $T=0$ için) geçerlidir.



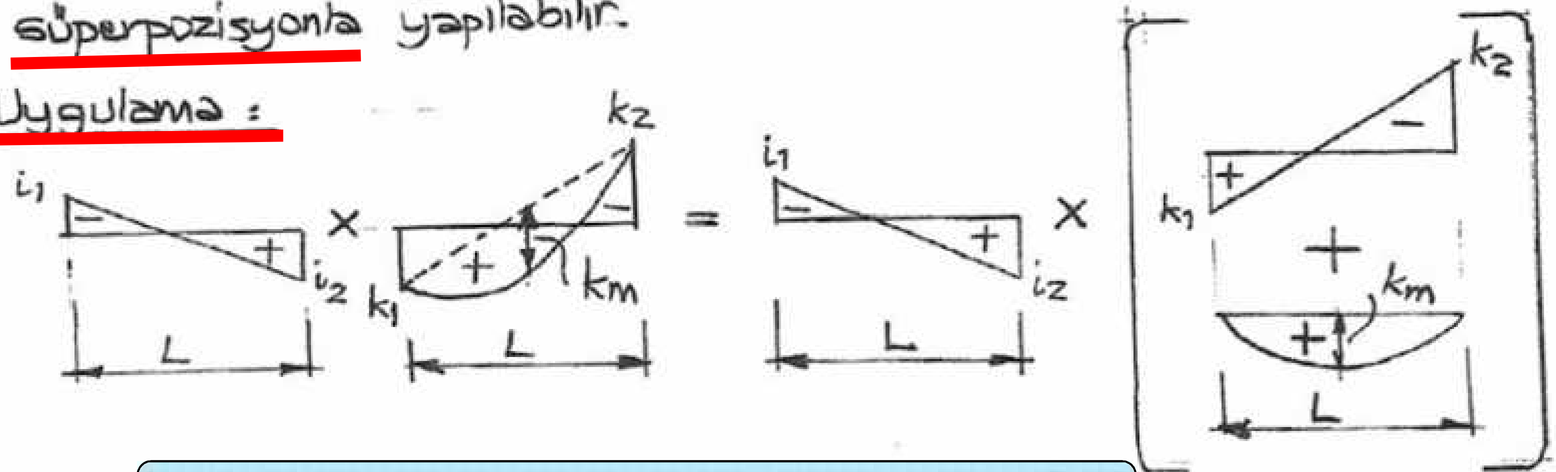


ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k ds$

	k — k, L	k, L	k_1 — k_2, L	$2°$, k_m, L	$2°$, k, L	$2°$, k, L	k, αL, βL
i — i, L	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
i, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
i, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$
i_1 — i_2, L	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1+\beta)i_1+(1+\alpha)i_2]$
$2°$, i_m, L	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{7}{15}Li_mk$	$\frac{1}{5}Li_mk$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)i_mk$
$2°$, i, L	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$
i, $2°$, L	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\alpha-\alpha^2)ik$
$2°$, i, L	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$
i, $2°$, L	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\beta+\beta^2)ik$
i, αL, βL, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}Li[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

4) Tabloda bulunmayan bazı moment diyagramlarının çarpım integrali süperpozisyonla yapılabilir.

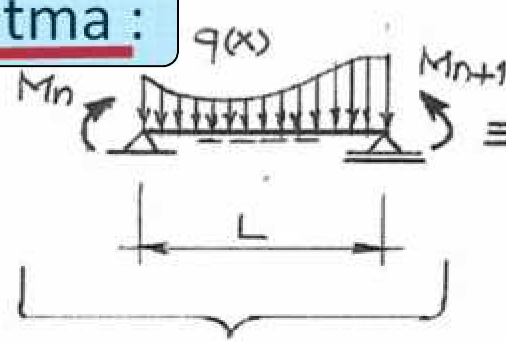
- **Uygulama :**

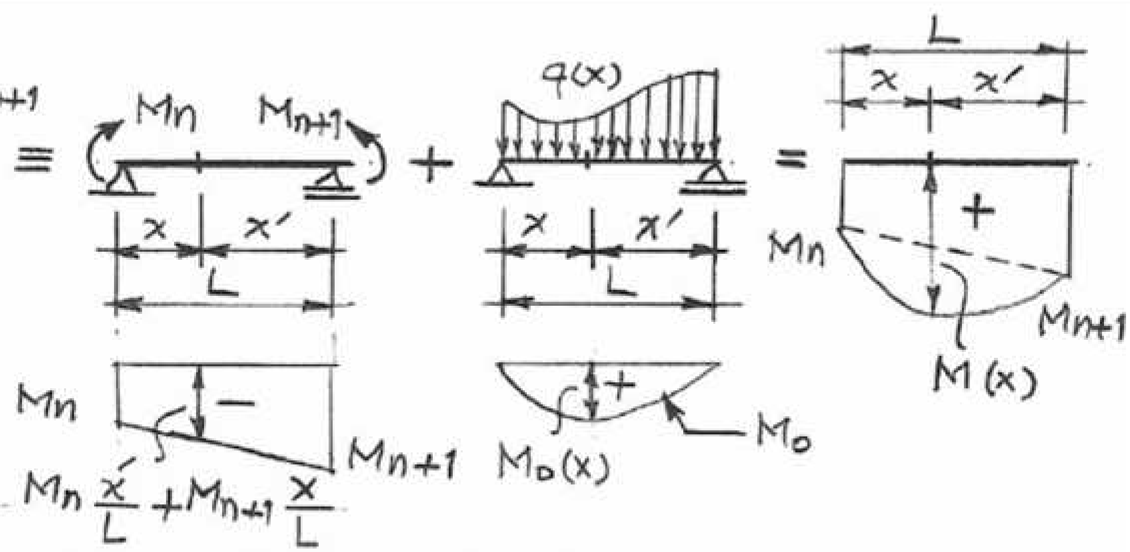


Not : $(A+B)\times(C+D) = AC + AD + BC + BD$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Hatırlatma :



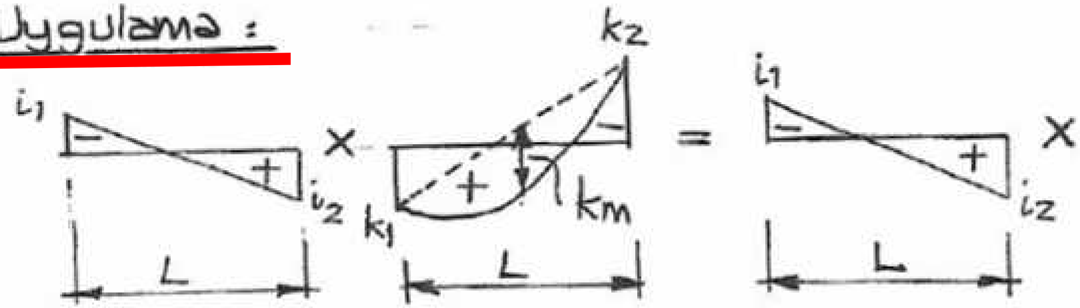


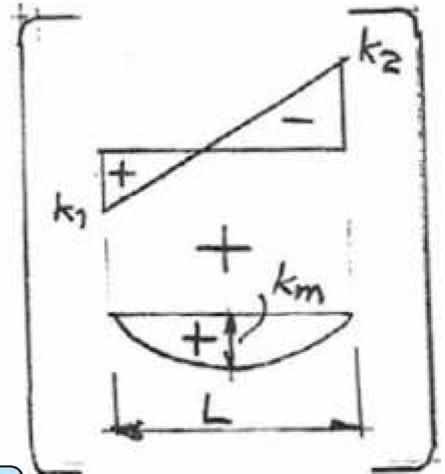
- Not : sistem dengede olduğundan, denge denklemlerini sağlayan mesnet tepkileri T_n ve T_{n+1} 'e eşittir.

$$\boxed{M(x) = M_0(x) + M_n \frac{x'}{L} + M_{n+1} \frac{x}{L}}$$

4) Tabloda bulunmayan bazı moment diyagramlarının çarpım integrali süperpozisyonla yapılabilir.

- **Uygulama :**

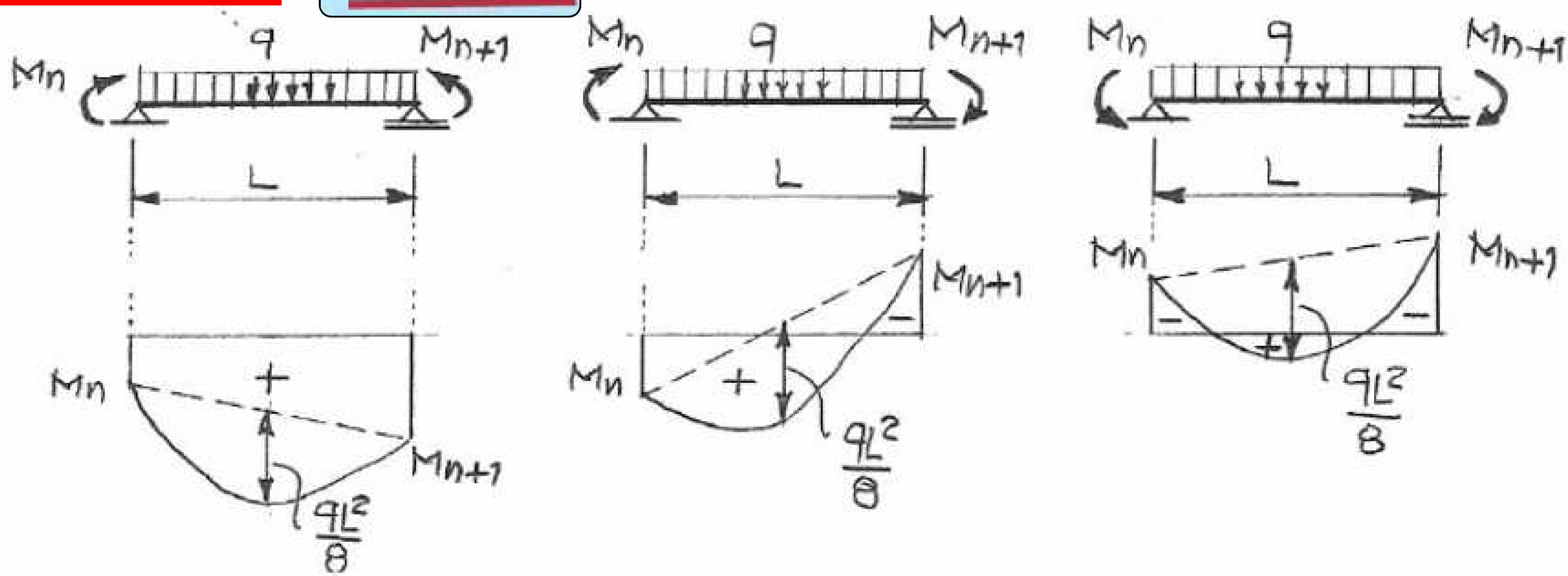




Not : $(A+B)\times(C+D) = AC + AD + BC + BD$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Uygulamalar **Hatırlatma** :

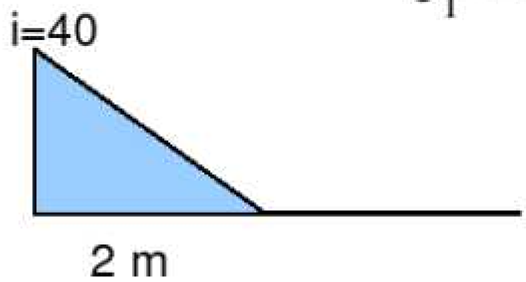


5) Çarpım tabloları $\int N\bar{N}ds$ ve $\int T\bar{T}ds$ çarpım integrallerinin hesabı için de benzer şekilde uygulanabilir.

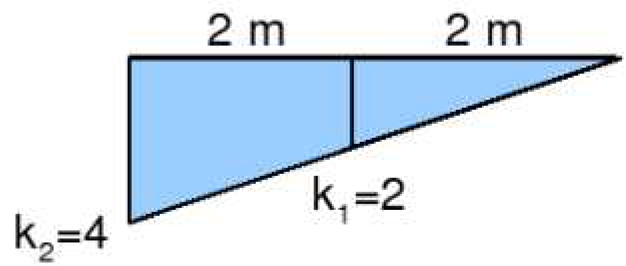
ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k ds$							
	k k L	k L	k_1 k_2 L	$2°$ k_m L	$2°$ k L	$2°$ k L	k αL βL
i i L	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
i L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
i L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$
i_1 i_2 L	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1+\beta)i_1+(1+\alpha)i_2]$
$2°$ i_m L	$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{7}{15}Li_mk$	$\frac{1}{5}Li_mk$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)i_mk$
$2°$ i L	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$
i $2°$ L	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\alpha-\alpha^2)ik$
$2°$ i L	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$
i $2°$ L	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\beta+\beta^2)ik$
i αL βL L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}Li[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

Çarpım tablosunun kullanılırken: Çarpılacak diyagramlar tabloda bulunarak bunların ait oldukları satır ve kolonun kesim noktasından integralin sonucu alınır.

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_0 Diyagramı



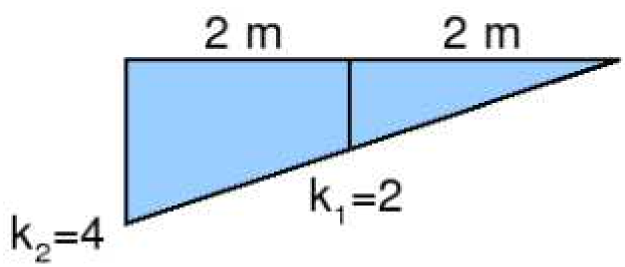
M_1 Diyagramı

$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k\,ds$					
	k ▭ k, L	◺ k, L	k_1 ◺ k_2, L	$2°$ ⌒ k_m, L	$2°$ ◺ k, L
i ▭ i, L	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$
◺ i, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$
i ◹, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$
i_1 ▭ i_2, L	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{6}*2*(-40)*(2+2*4) = -133.333$$

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_1 Diyagramı

$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k \, ds$

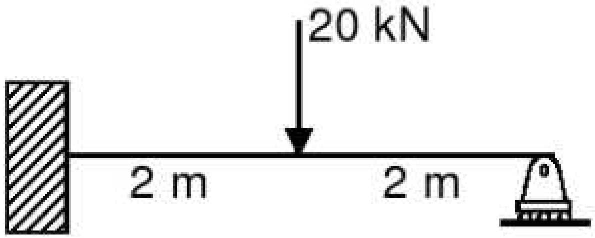
	k L k	L k	k_1 L k_2	$2°$ k_m L	$2°$ L k
i L i	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$
L i	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$
i L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$
i_1 L i_2	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$

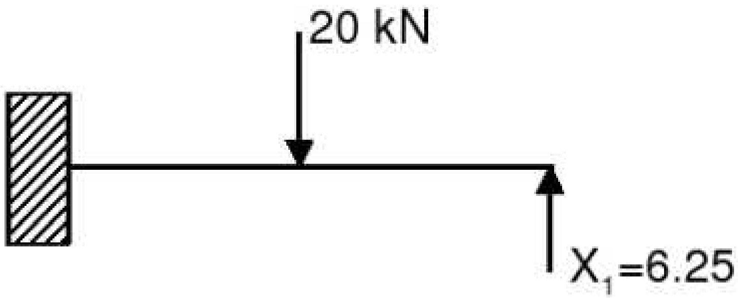
$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{3}L\,i\,k = \frac{1}{3}*4*4*4 = 64/3 = 21.333$$

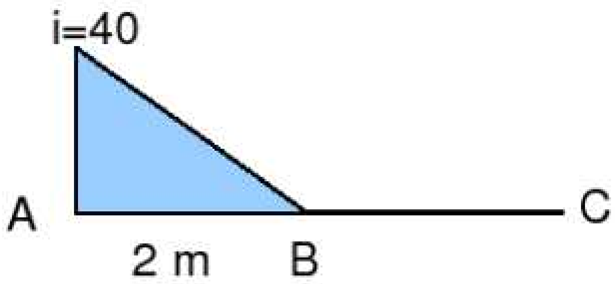
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

$$\delta_1 = 0 = -133.333 + 21.333\, X_1$$

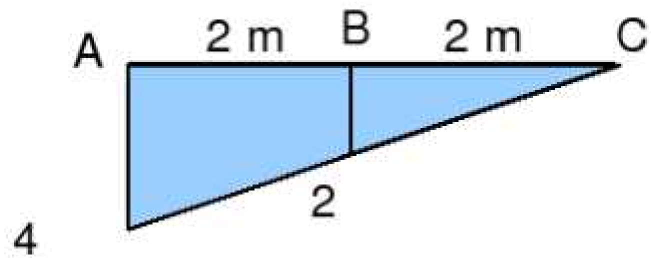
$X_1 = 6.25$







M_0 Diyagramı

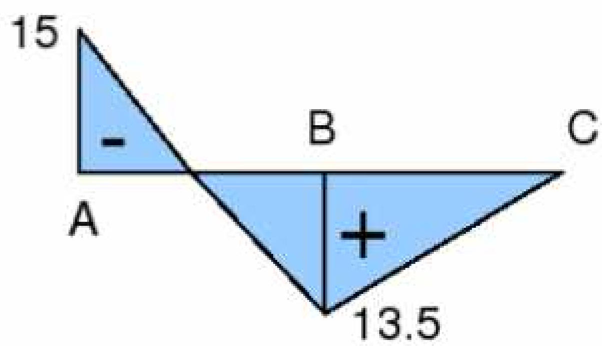


M_1 Diyagramı

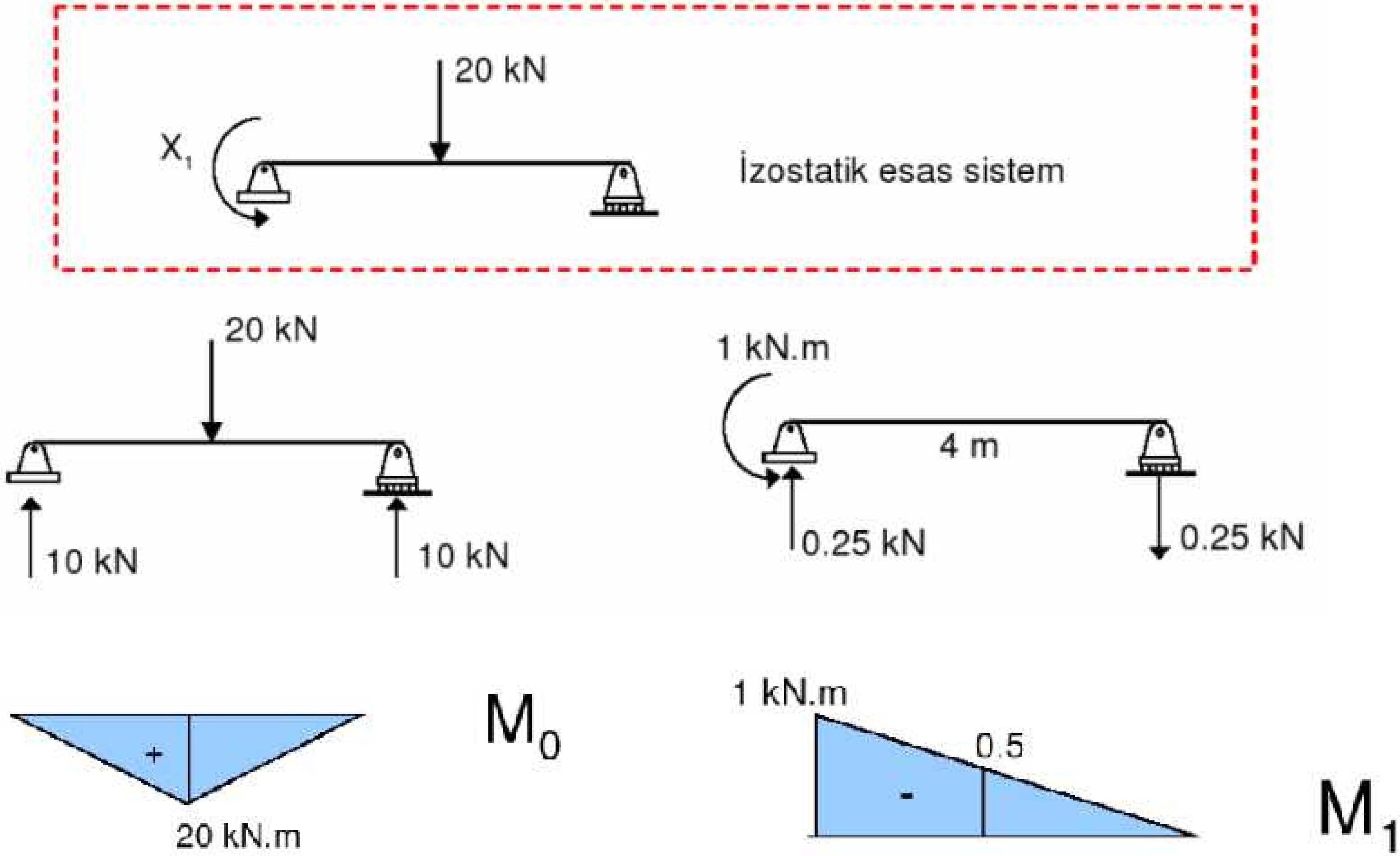
$M_A = M_{0A} + M_{1A} * X_1 = (-40) + 4*(6.25) = -15$

$M_B = M_{0B} + M_{1B} * X_1 = (0) + 2*(6.25) = 13.5$

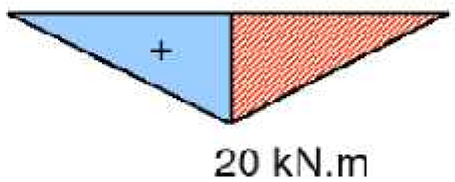
$M_C = M_{0C} + M_{1C} * X_1 = (0) + 2*(0) = 0$



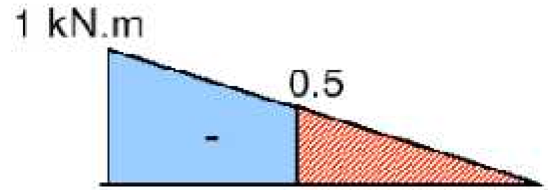
Aynı sistemi çözmek için izostatik esas sistemi farklı seçelim.



$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_0 Diyagramı



M_1 Diyagramı

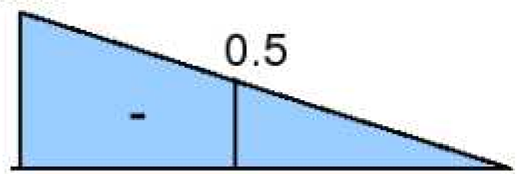
$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k \, ds$					
	k k L	k L	k_1 k_2 L	k_m L	k L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$
i L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$
i L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$
i_1 i_2 L	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{3}Lik + \frac{1}{6}Li(2k_1 + k_2)$$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{3}*2*(20)*(-0.5) + \frac{1}{6}*2*(20)*(2*(-0.5)+(-1)) = -20$$

1 kN.m



M_1 Diyagramı

ÇARPIM TABLOSU $\int M_i M_k \, ds$					
	k k L	k L	k_1 k_2 L	2° k_m L	2° k L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{2}$ Li $(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3}$ Li k_m	$\frac{2}{3}$ Lik
i L	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{3}$ Lik	$\frac{1}{6}$ Li $(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3}$ Li k_m	$\frac{5}{12}$ Lik
i L	$\frac{1}{2}$ Lik	$\frac{1}{6}$ Lik	$\frac{1}{6}$ Li $(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3}$ Li k_m	$\frac{1}{4}$ Lik
i_1 i_2 L	$\frac{1}{2}L(i_1 + i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1 + 2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1 + i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1 + 5i_2)k$

$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI} = \frac{1}{3} L\,i\,k = \frac{1}{3} 4.(-1).(-1) = 1.333$$

$$EI\,\delta_{11} = 1.333$$

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

$$\delta_1 = 0 = -20 + 1.333\, X_1$$

$X_1 = 15$