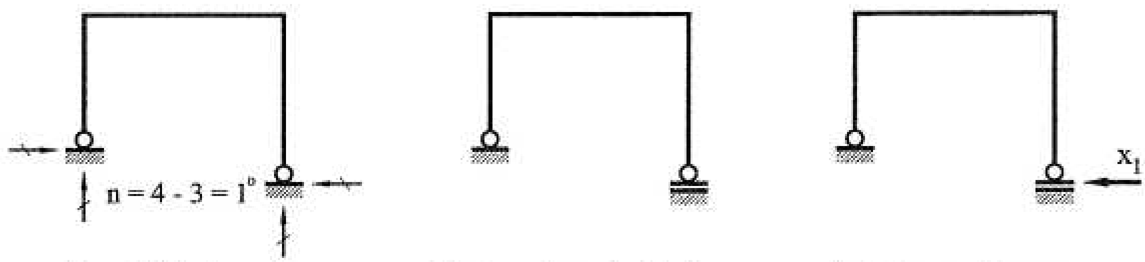
KUVVET YÖNTEMİNE GİRİŞ:

Daha önce incelenmiş bulunan *izostatik sistemlerin çözümünde;* denge denklemleri, mesnet tepkisi ve kesit zorlarının veya başka bir deyişle iç kuvvetlerin bulunması için, bünye denklemleri de şekildeğiştirmeler ve dolayısıyla yerdeğiştirmelerin bulunması için yeterli olmaktadır.

Sadece *denge ve bünye denklemlerinin* yardımı ile çözülemeyen sistemlere *hiperstatik sistemler* denir. Hiperstatik sistemler, bu denklemlere ancak *süreklilik denklemlerinin* de

eklenmesiyle çözülebilir duruma gelirler. Yazılması gerekli olan süreklilik denklemi sayısına sistemin *hiperstatiklik derecesi* adı verilir. Bunun saptanabilmesi için izlenebilecek kolay yollardan biri, hiperstatik sistemin çeşitli kesimlerle bazı kesit zorlarının ve/veya dış ortama olan bağlarının azaltılarak *çözülebilir sistemlere* indirgenmesi yoludur. Bu işlem sırasında sistem taşıyıcılığını kaybetmemelidir. *Çözülebilir sistem*, bir izostatik sistem olabileceği gibi, çözümü önceden bilinen bir hiperstatik sistem de olabilecektir. Buna ulaşmak üzere kaldırılmış bulunan kesit zoru ya da bağ sayısı sistemin *hiperstatiklik derecesi* olacaktır.

Fazla bağların kaldırılması ile ortaya çıkan *kesim yapılmış yeni sistemde*, çözümü aranan hiperstatik sistem için geçerli olan süreklilik koşulları sağlanamaz. *Hiperstatik bilinmeyen* adını alan ve kaldırılmış olan fazla bağlar o şekilde seçilebilecektir ki yapılan kesimlere ya da gevşetilen bağlara karşın, başlangıçta verilen tüm süreklilik koşulları da sağlanabilecek ve kesim yapılmış sistem, hiperstatik bilenmeyenlerle birlikte gerçek hiperstatik sisteme özdeş olabilecektir. Şekil 5.10 bu düşünceleri örneklemektedir. Verilen sistem dış ortama dört bağ ile bağlıdır. Bu düzlem sistemin genel dengesi için üç denge denklemi yazılabileceği düşünülürse, çözüm için bir yeni denkleme daha gerek duyulmaktadır. Örnekte mafsallı mesnetlerden biri kayıcı hale getirilerek, sistemi dış ortama bağlayan bağların sayısı bir azaltılmış ve sistem denge ve bünye denklemleriyle çözülebilir hale getirilmiştir. Ancak bağı kaldırılan mesnet yatay doğrultuda yerdeğiştirme yapabilir duruma gelmiştir ki bu, gerçek sistemin geometrik sınır koşullarına uymamaktadır. Yani izostatik hale getirilen bu sistem verilen hiperstatik sistemin sınır koşullarını sağlamamaktadır. Kaldırılan yatay tepki o şekilde belirlenecektir ki sözü edilen kayıcı mesnetteki yatay yerdeğiştirme sıfır olacak yani bu mesnette de artık kesim öncesi var olan süreklilik sağlanacaktır. Değeri bulunan hiperstatik bilinmeyenle birlikte kesim yapılmış sistem hiperstatik sisteme özdeştir. Artık *denge, bünye* ve *süreklilik denklemlerinin* tümü sağlanmış olmaktadır.



n: hiperstatiklik derecesi

Kesim yapılmış, fazla bağı kaldırılmış, *denge* ve *bünye* denklemleri ile çözülebilir sistem, *İzostatik Esas Sistem,* hiperstatik sistemin süreklilik koşullarını sağlamayan sistem

İzostatik esas sistem ve X_1 hiperstatik bilinmeyeni

Şekil 5.10 Birinci dereceden hiperstatik bir sistem, izostatik bir esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen

Etkilerin Toplanması – Süperpozisyon

Kuvvet yöntemi birinci aşamada hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması amaçlamaktadır. Onlar bulunduktan sonra iç kuvvetlerin bulunmasında bir güçlük kalmayacaktır. Çünkü doğrusal elastik malzemeden yapılmış olduğu varsayılan sistem için *süperpozisyon kuramı* ya da *etkilerin toplanabilirliği* kuramı geçerlidir. Şekil 5.11 bu düşünceyi özetlemektedir.

Herhangi bir m kesiti için seçilen, örneğin M eğilme momenti izostatik sisteme yapılan iki ayrı yüklemenin toplamıyla

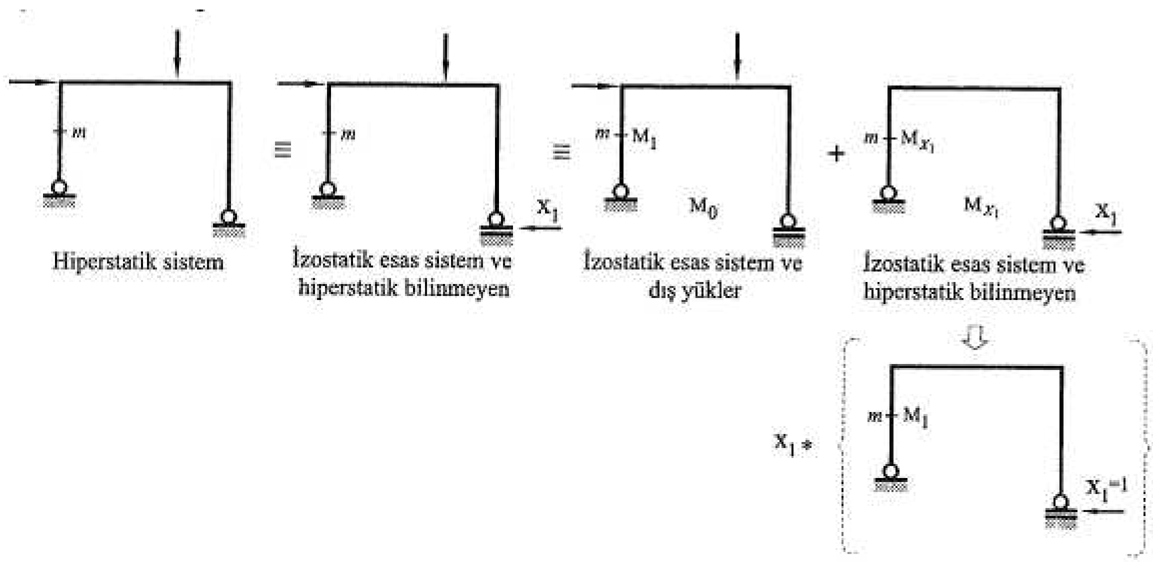
(5.5)

şeklinde veya

(5.6)

şeklinde verilebilecektir. Burada M_{X_1} hiperstatik bilinmeyeninden dolayı herhangi bir m kesitinde oluşan momenti göstermekte ve o da hiperstatik bilinmeyenin birim değeri için aynı kesitte ortaya çıkan M_1 momentinin X_1 katı ile ifade edilebilmektedir.

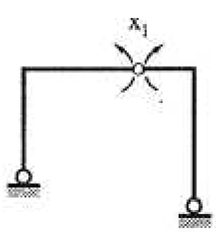
Sonuç olarak süperpozisyon kuralı geçerli olduğu sürece herhangi bir kesitteki bir iç kuvvet ya da herhangi bir statik büyüklük, farklı iki tipteki yüklemenin ayrı ayrı neden olduğu büyüklüklerin toplamı ile verilebilecektir.



Şekil 5.11 Etkilerin toplanabilirliği – süperpozisyon

Bilinmeyenlerin ve İzostatik Esas Sistemin Seçimi

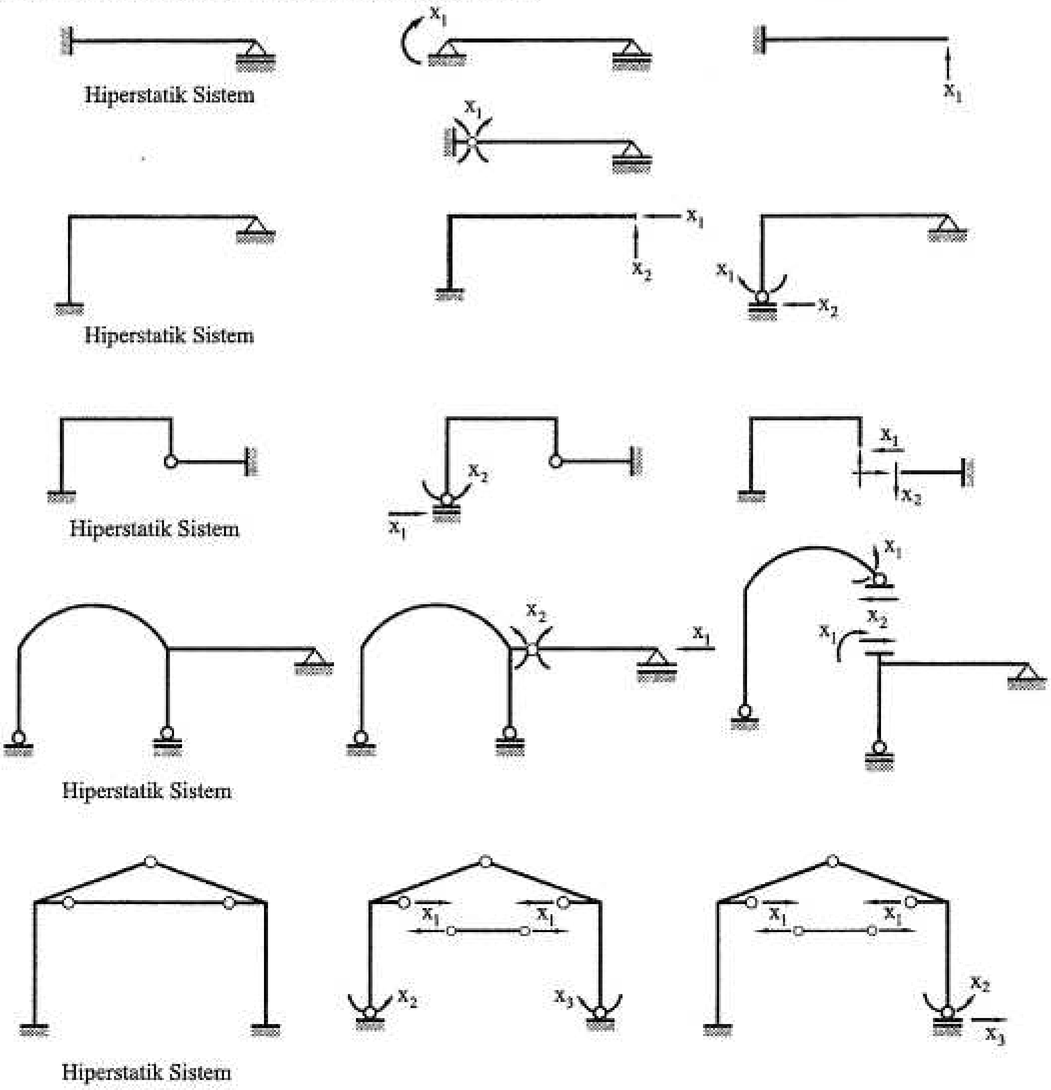
Fazla bağlı bir sistemde kesimler yapılıp, bazı bağlar kaldırılırken çeşitli seçenekler ortaya çıkacaktır. Nitekim Şekil 5.11'deki sistemin mesnet bağlarından birini kaldırmak yerine, örneğin kirişin herhangi bir kesitinde var olan üç bağdan birini örneğin moment bağını kaldırılıp yani orada moment aktarmayan bir kesit öngörülerek bir başka ifadeyle orada bir mafsal oluşturularak da başka bir izostatik sisteme geçilebilir, Şekil 5.12. Kesimlerden sonra çözülebilir duruma gelen sistem izostatik sistem olabileceği gibi hiperstatik bir sistem de olabilecektir. İzostatik veya hiperstatik olsun çözülebilir durumdaki bu sistemlere *esas sistem* adı verilir; izostatik ise *izostatik esas sistem*, hiperstatik ise *hiperstatik esas sistem* olarak adlandırılır.



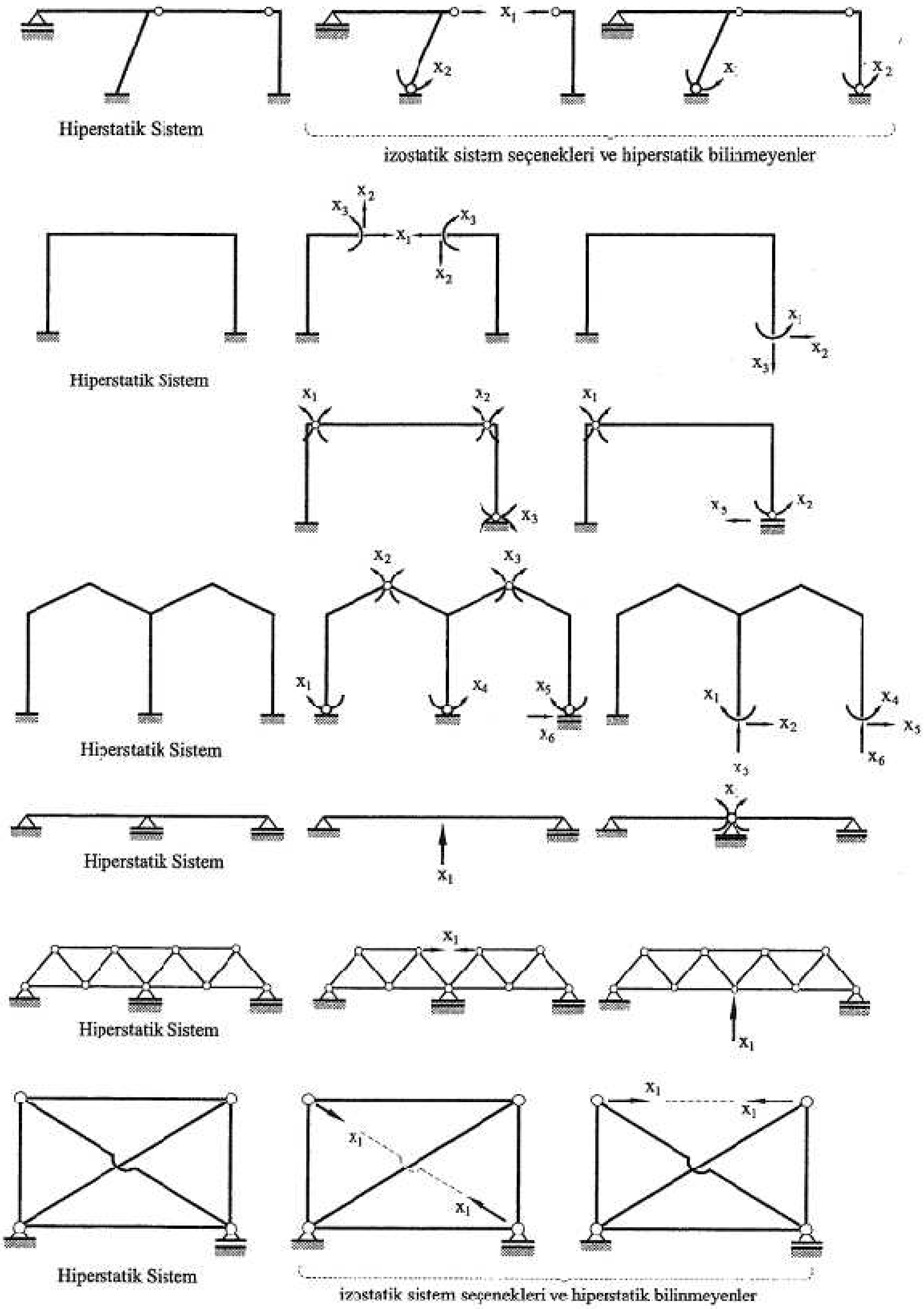
Şekil 5.12 Başka bir izostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen

Aşağıda tamamlayıcı bir dizi örnek üzerinde *hiperstatiklik derecesi, izostatik* veya *hiperstatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyenler* gözden geçirilmektedir, Şekil 5.13. Olası esas sistemler ve ilgili bilinmeyenler gözden geçirilirken bunlar arasından en uygun olanının hangisi olabileceği üzerinde düşünülmeli, kesimlerle sistemin taşıyıcılık özelliğinin kaybolmamakta olduğuna dikkat edilmelidir. Sistemdeki fazla bağ sayısı n yapılan kesim sayısı k ise $k = n$ olması durumunda izostatik esas sistemlerle, $k < n$ olması durumunda ise hiperstatik esas sistemlerle çalışılacak demektir.

Çözülebilir sistemin ***izostatik sistem olması*** *durumu;*

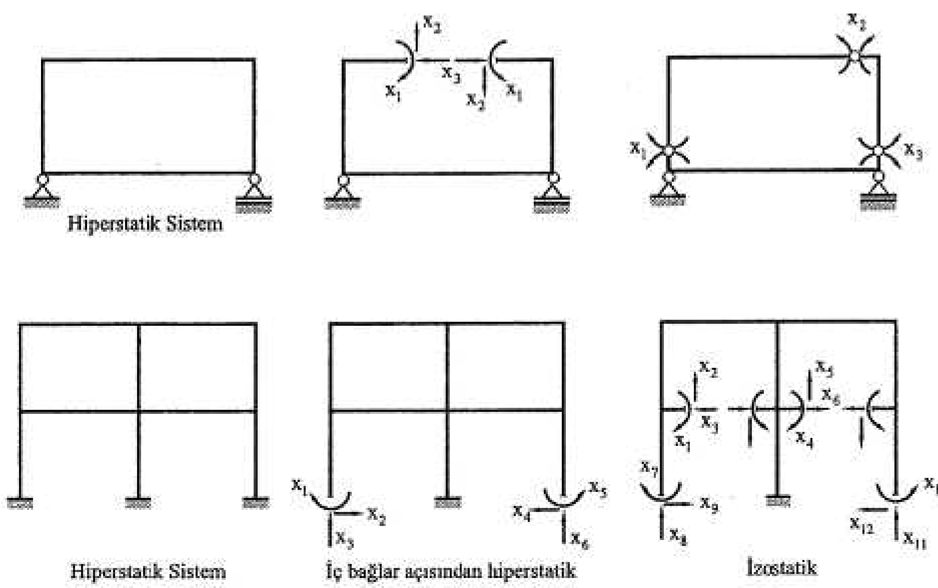


Şekil 5.13 Hiperstatik sistemler ve olası izostatik esas sistemler ile hiperstatik bilinmeyenler

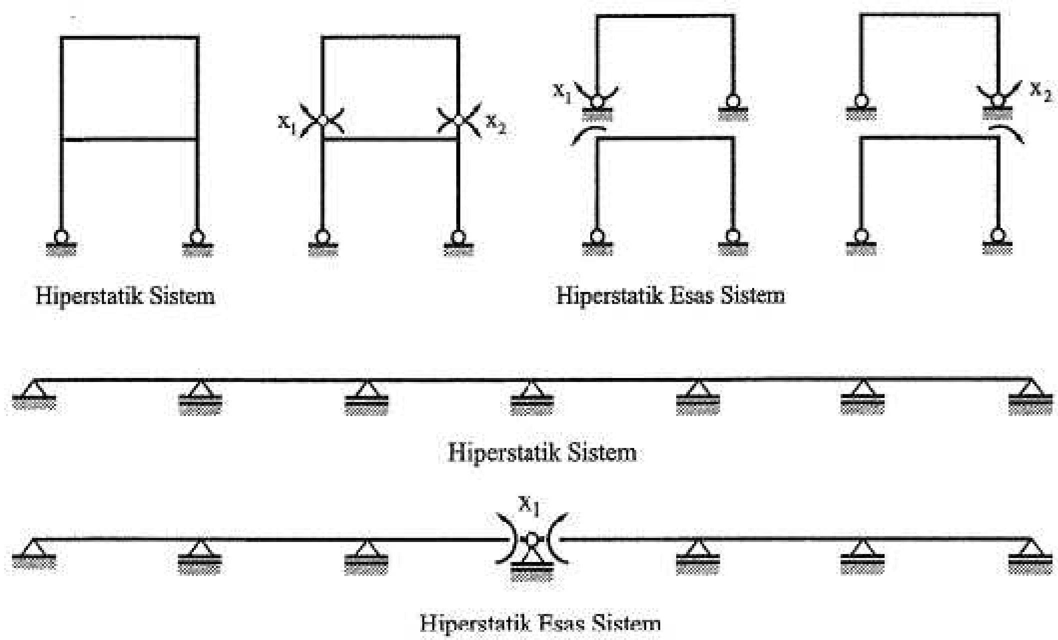


Şekil 5.13 Hiperstatik sistemler ve olası izostatik esas sistemler ile hiperstatik bilinmeyenler – Devam

Dış bağlar açısından izostatik iç bağlar açısından hiperstatik sistem



*Çözülebilir sistemin **hiperstatik sistem olması** durumu;*



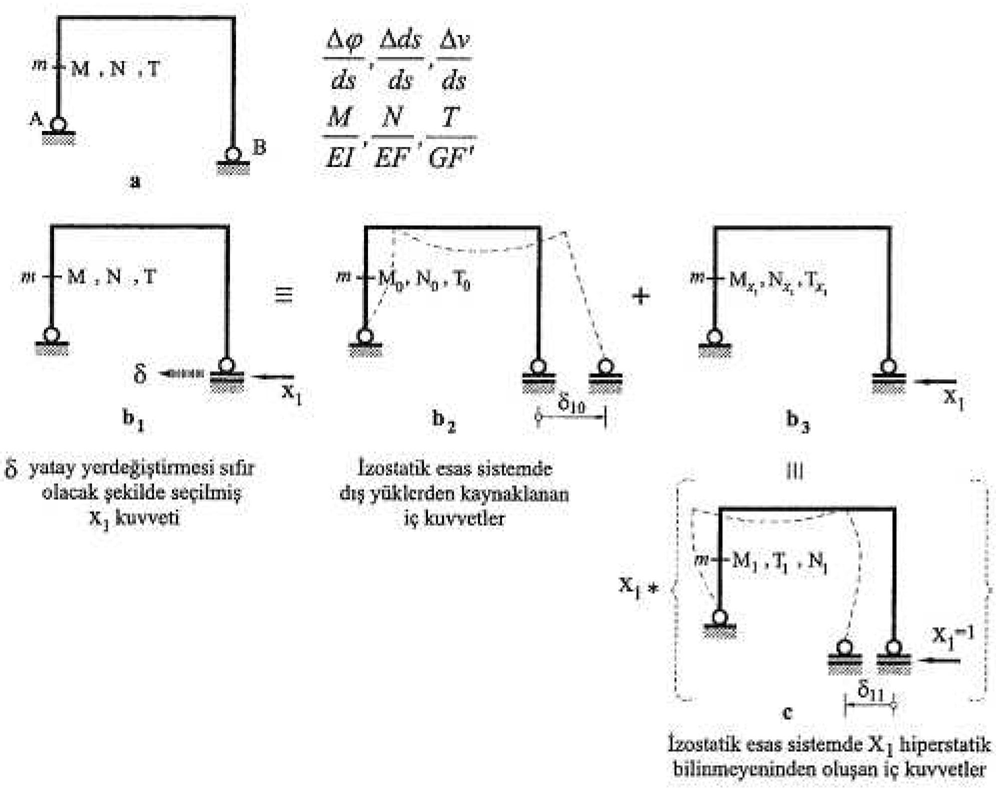
Şekil 5.13 Hiperstatik sistemler ve olası izostatik ya da hiperstatik esas sistemler ile hiperstatik bilinmeyenler – Devam

Anlatımda kolaylığı sağlamak üzere ve genelliği bozmadan, önce birinci dereceden hiperstatik bir sistem üzerinde çalışılarak, kuvvet yönteminin bir çizim üzerinde açıklamasına Şekil 5.14'de yer verilmektedir. Burada dış etki olarak öncelikle *dış yükler* göz önünde tutulacak, *sıcaklık değişimi* ve *mesnet çökmelerinin* hesaba katılması daha sonraya bırakılacaktır.

Birinci Dereceden Hiperstatik Sistemler:

Süreklilik Denklemleri ve Fiziksel Anlamları

Dış etki olarak öncelikle dış yüklerin göz önüne alındığı Şekil 5.14a'daki birinci dereceden hiperstatik sistemin aranan *iç kuvvetleri* ve *şekildeğiştirmeleri* ile *iç kuvvet-şekildeğiştirme bağıntıları* aynı şekil üzerinde yer almaktadır. *B* mesnetindeki yatay bağın *hiperstatik bilinmeyen* olarak seçildiği *izostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen* Şekil 5.14b_1'de gösterilmiştir. Burada, X_1 o şekilde belirlenecektir ki Şekil 5.14b_1'in *B* mesnetinde bozulmuş olan sınır koşulu sağlansın, yani δ yerdeğiştirmesi hiperstatik sistemin sınır koşulları gereği sıfır olsun ve Şekil 5.14b_1'deki sistem Şekil 5.14a'dakine özdeş olsun. Bu sağlandıktan sonra yüklemeler Şekil 5.14b_2 ve b_3'deki gibi iki gruba ayrılabilir. Şekil 5.14b_2 kesim yapılarak izostatik hale getirilmiş sistemin sadece dış yükler etkisindeki durumuna, Şekil 5.14b_3 ise sistemin hiperstatik bilinmeyenin etkisindeki durumuna karşılık gelmektedir. İzostatik esas sisteme sadece X_1 bilinmeyeninin etkimekte olduğu bu durumun Şekil 5.14c'de özetlenen, $X_1 = 1$ yüklemesinin X_1 katı alınarak elde edilebileceği görülmektedir[I].



Şekil 5.14 Dış yükler etkisindeki birinci dereceden hiperstatik bir sistem

Buna göre Şekil 5.14b_1'deki iç kuvvetlere (5.7) denklemleri aracılığı ile ulaşılabilecektir.

Bu denklemlerle, denge denklemleri kullanılarak izostatik esas sistem üzerinden üretilen iç kuvvetlerin süperpozisyonu yapılmış olmaktadır. Bu denklemler, doğrusal elastik davranan yapı sistemlerinin çözümü için her koşulda kullanılabilecek genel denklemlerdir, Bkz. Bölüm V.1.7.3.

Sistemin Şekil 5.14a veya ona özdeş Şekil 5.14b$_1$'deki gerçek şekildeğiştirmeleri *şekildeğiştirme durumu*, Şekil 5.14c'deki $X_1 = 1$ özel yükleme durumu da, *yükleme durumu*, olarak alınıp virtüel iş teoremi uygulanırsa

(5.8)

sonucuna ulaşılacaktır. Burada X_1'in *dış kuvvetlerin işi sıfır olacak biçimde seçilmekte* olduğu unutulmamalı ve şu iki noktaya dikkat edilmelidir;

i. Anlatımda basitliği korumak üzere iç kuvvetlerin işi yazılırken sadece eğilme şekildeğiştirmeleri göz önünde tutulmuştur. Ancak bu bir kısıtlama değildir, gerekli görüldüğünde kayma ve uzama şekildeğiştirmeleri de hesaba bilinen şekliyle katılabilecektir, Bkz. Bölüm IV.3.5.

ii. *B* mesnetindeki δ yerdeğiştirmesinin sıfır olması öngörüldüğü için virtüel iş teoreminin uygulanabilirlik koşulları sağlanmış olmaktadır, Bkz. Bölüm IV.3.3. (5.8) denklemindeki dış kuvvetlerin işi öngörüldüğü gibi sıfır alınırsa önce (5.9) denklemine, orada verilen δ_{10} ve δ_{11} tanımları göz önüne alınarak da Bkz. Şekil 5.14b$_2$ ve c,

(5.9)

(5.10)

(5.10) denklemine ulaşılmaktadır. Burada (5.8) denklemi *kapalı süreklilik*, (5.9) ve (5.10) denklemleri de *açık süreklilik denklemleri* adını almaktadır. (5.10) denklemindeki

δ_{10}:

δ_{11}:

göstermektedir. Sonuç olarak δ_{10} ve $\delta_{11}X_1$ yerdeğiştirmeleri izostatik hale getirilmiş sistemin B mesnetinde oluşan yerdeğiştirmelerdir; toplamları (5.10) denklemi gereği sıfır

yapılacak şekilde X_1 belirlenerek B mesnetindeki sınır koşulu sağlanmış olmaktadır. (5.10) denkleminden hiperstatik bilinmeyen X_1

(5.11)

oranı ile elde edilebilecektir. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta da δ_{10} ve δ_{11} yerdeğiştirmelerinin gerçek büyüklükleriyle burada yer almalarının gerekli olmadığıdır; örneğin, EI_c gibi bir ortak katlarıyla da kullanılmış olsalar hiperstatik bilinmeyenin aynı X_1 değerine

(5.12)

oranıyla da ulaşılabileceği açıktır.

Denklem (5.8)'de eğilme şekildeğiştirmeleri yanında kayma ve uzama şekildeğiştirmeleri de göz önüne alınırsa, ardışık olarak,

yazılabilir. Bu ifade düzenlenirse ;

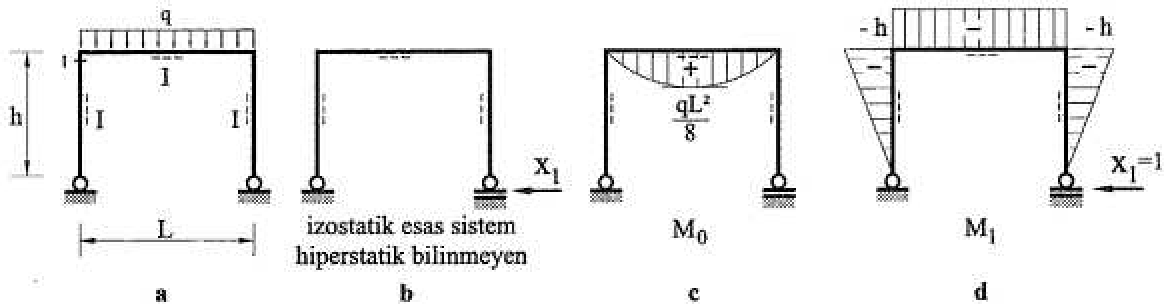
elde edilir. Buradan δ_{10} ve δ_{11} için en genel olarak,

(5.13)

(5.14)

ifadelerine ulaşılır.

bilinmeyeninin 1 alındığı durumda M_1 diyagramı Şekil 5.15d deki gibi olacak ve eldeki diyagramların çarpımlarından da önce δ_{10} ve δ_{11}, sonra süreklilik denkleminden de X_1 bilinmeyeni aşağıdaki gibi bulunarak I kesitindeki M^1 momentine süperpozisyon ile ulaşılabilecektir. Bu işlemler aşağıda sıralanmaktadır.



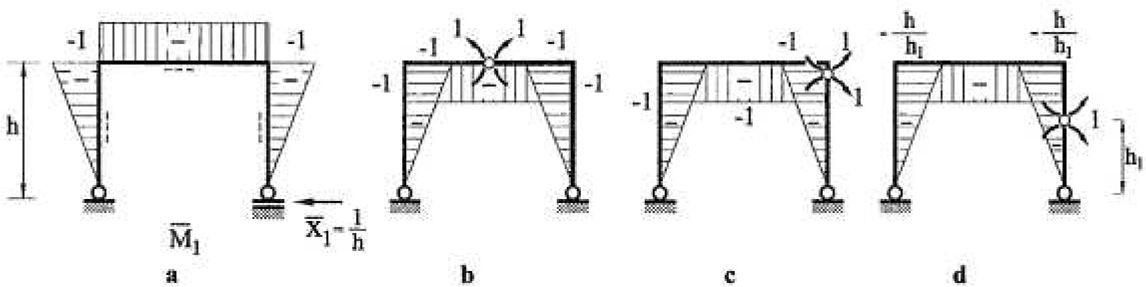
Şekil 5.15 Birinci dereceden hiperstatik çerçeve

Kuramsal olarak (5.10) *açık süreklilik denkleminden* hiperstatik bilinmeyen bulunup (5.7) *süperpozisyon denklemiyle* yani genel anlamda denge denklemleriyle iç kuvvetlere ulaşılmış olacaktır. Ancak bu uygulamanın ilk adımının gerçekleşebilmesi, EI, GF', EF ile gösterilen elemanların *eğilme, kayma* ve *uzama rijitliklerinin* biliniyor olmasına bağlıdır. Sistem hiperstatik olduğu için henüz iç kuvvet dağılımının bilinmediği böylesi bir durumda, işlemler ancak eleman rijitliklerinin önceden yaklaşık olarak kestirilmesi ile başlatılabilir;

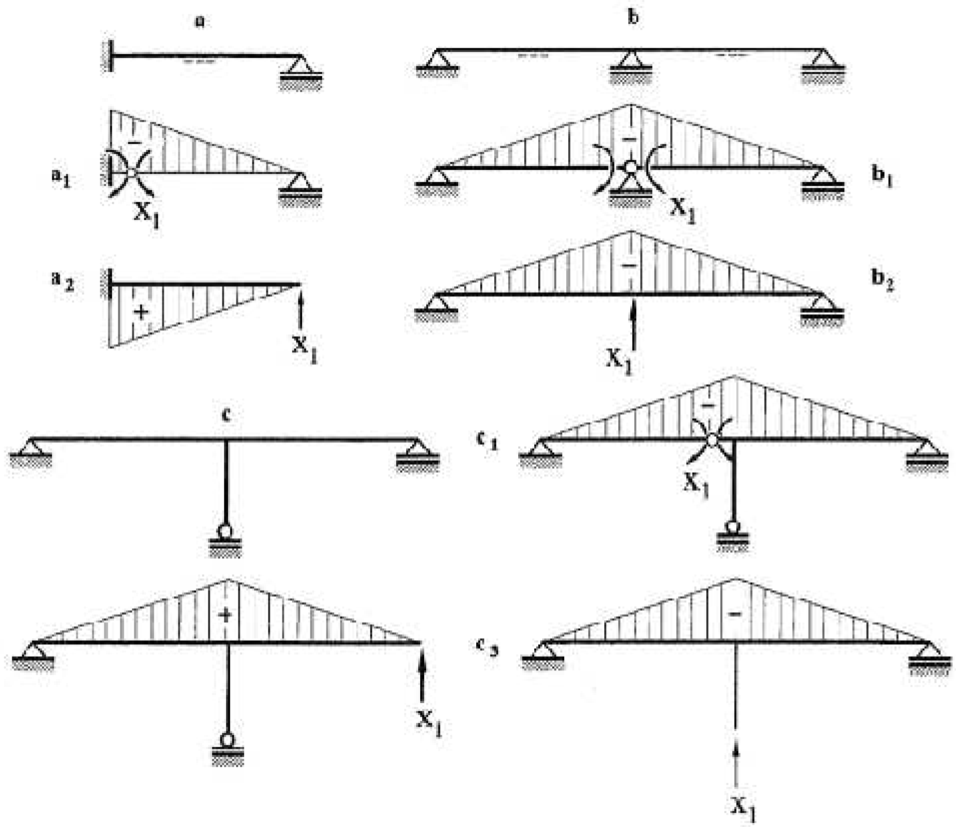
i. *Kuvvet yöntemi uygulanırken hiperstatik bilinmeyenlerin birim değerleri ile çözüm aramak zorunluluk değildir:* Şekil 5.15a' daki birinci dereceden hiperstatik olan sistemin çözümü için, Şekil 5.15b'deki izostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen seçilmiş ve $X = 0$ durumuna karşılık gelen M_0 diyagramı da Şekil 5.15c'deki gibi elde edilmiş olabilir. X_1 hiperstatik

X_1 yüklemesi için $X_1 = 1$ yerine $\overline{X}_1 = 1/h$ alınması durumunda Şekil 5.15d'dekine benzer Şekil 5.16a'daki $\overline{M}_1$ diyagramına ulaşılacaktır. İki durumda da aynı kalan M_0 diyagramı ile $\overline{M}_1$ diyagramı çarpılırsa $1/h$ farkı ile δ_{10}'a, $\overline{M}_1$ kendisi ile çarpılırsa $1/h^2$ farkı ile δ_{11}'e ve sonuçta süreklilik denkleminden $1/h$ farkı ile X_1 e ulaşılacak ve $M^1 = M_0^1 + \overline{M}_1^1 \times \overline{X}_1$ süperpozisyonu yapıldığında da aynı değer elde edilmiş olacaktır. Benzer sonuca varılması için M_1, $\overline{M}_1$ ve X_1, $\overline{X}_1$'in eşitlikleri değil, $M_1^1 \times X_1$ çarpımıyla $\overline{M}_1^1 \times \overline{X}_1$ çarpımlarının eşitliği yeterli olmaktadır.

ii. *Bir bilinmeyenli hiperstatik sistemler için elde edilecek X_1 yüklemelerine karşılık gelen iç kuvvet diyagramları, X_1 olarak hangi büyüklüğün seçilmiş olmasından bağımsız olarak, benzerdir*, Şekil 5.16b, c, d, Şekil 5.17a₁, a₂, b₁, b₂, c₁, c₂, c₃.

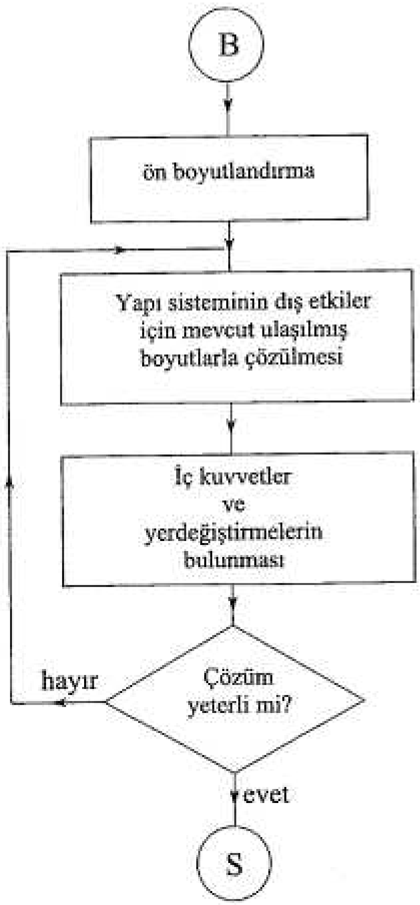


Şekil 5.16 Değişik izostatik esas sistemler ve bazı özel yüklemeler



Şekil 5.17 Değişik birinci dereceden hiperstatik sistemler ve farklı izostatik esas sistemler

Ön Boyutlama Gereği



- Yaklaşık hesaplar
  - Düşey yükler için hesap
  - Yatay yükler için hesap
- Önceki deneyimler

Eldeki boyutların tanımlandığı rijitliklerle
- İç kuvvet dağılımlarının bulunması
- Yerdeğiştirmelerin hesabı
- Çözümlemede izlenecek yol
  - Hiperstatik bilinmeyenlerin belirlenmesi, izostatik esas sistemin seçimi
  - M_0 ve M_1 diyagramlarının çizilmesi
  - δ_{10} ve δ_{11}'in çarpımlarla elde edilmesi
  - Süreklilik denkleminden X_1' in bulunması
    $\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$ veya
    $EI_c\delta_{11}X_1 + EI_c\delta_{10} = 0$
  - Süperpozisyon ile iç kuvvetlerin hesabı
- Boyutlandırma esasları sağlanmakta mı?
- Yeterli rijitliklere ulaşıldı mı?
  - Yerdeğiştirme sınırları
  - Titreşim sınırları
- Ulaşılan çözüm en ekonomik çözüm mü?

Şekil 5.18 Hiperstatik sistemlerin boyutlandırılmasında ardışık yaklaşımlar

Ayrıca (5.10) denkleminden elde edilecek hiperstatik bilinmeyeninin hesabında δ_{10} ve δ_{11}'ın gerçek değerleri değil fakat sadece oranlarının önemli olduğu bir kez daha vurgulanırsa δ_{10} ve δ_{11}'ın belirli katları ile, örneğin EI_c katları ile de çalışılarak aynı sonuçlara ulaşılabilmesi ve böylelikle boyutlandırmaya esneklik kazandırılması mümkün olacaktır; yani (5.13) ve (5.14) denklemlerinin ilk terimleri ile yetinilir ve eşitliğin her iki tarafı EI_c ile çarpılırsa

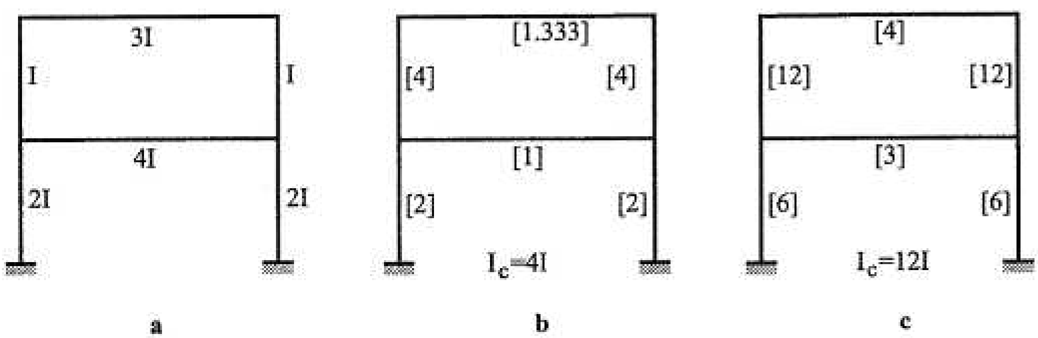
(5.15)

(5.16)

sonuçlarına ulaşılacaktır. Bu sonuçlarla (5.10) denklemine gidildiğinde aynı X_1 değeri elde edilecektir.

Hesaplarda (I_c /I) Oranlarının Kullanılması

Konuya giriş amacı ile seçilen aşağıdaki bazı örneklerin yerdeğiştirme hesaplarında çubukların gerçek kesit boyutları esas alınıp eylemsizlik momentleri hesaplanmamış, bunların bir I_c karşılaştırma değerine oranları ile çalışılmıştır. Çubukların eylemsizlik momentlerini ayrı ayrı seçmek yerine böyle oranlarının saptanması hesap açısından daha uygun olabilmektedir. Çünkü hiperstatik sistemlerin boyutlandırılması aşamasında; hesabın başlangıcında elemanların kesitleri için henüz elde hiçbir bilgi yoktur. Bazı tahminlerle işe başlanıp ardışık işlemlerle uygun çözüme yaklaşılacaktır. Bu işlemler sırasında kesitlerin gerçek boyutları yerine eylemsizlik momentlerinin birbirlerine oranlarıyla çalışmak olanağı vardır; bu durum yinelenen hesaplarda kolaylık ve hız sağlar. Bir örnek vermek üzere, Şekil 15.19a, çubuklardan birinin eylemsizlik momenti, örneğin en büyüğü, $I_c = 4I$, veya eylemsizlik momentlerinin ortak bir katı $I_c = 12I$, *karşılaştırma eylemsizlik momenti* I_c *olarak seçilmiş*, ve her çubuğun kestirilen I eylemsizlik momentine karşılık gelmek üzere $[I_c/I]$ oranları belirlenmiştir, Şekil 5.19b ve c. Böyle bir yaklaşıma, bu esasa göre hazırlanmış mevcut bazı yayınlardan da yararlanmayı kolaylaştıracağı için, burada yer verilmesi uygun bulunmuştur.



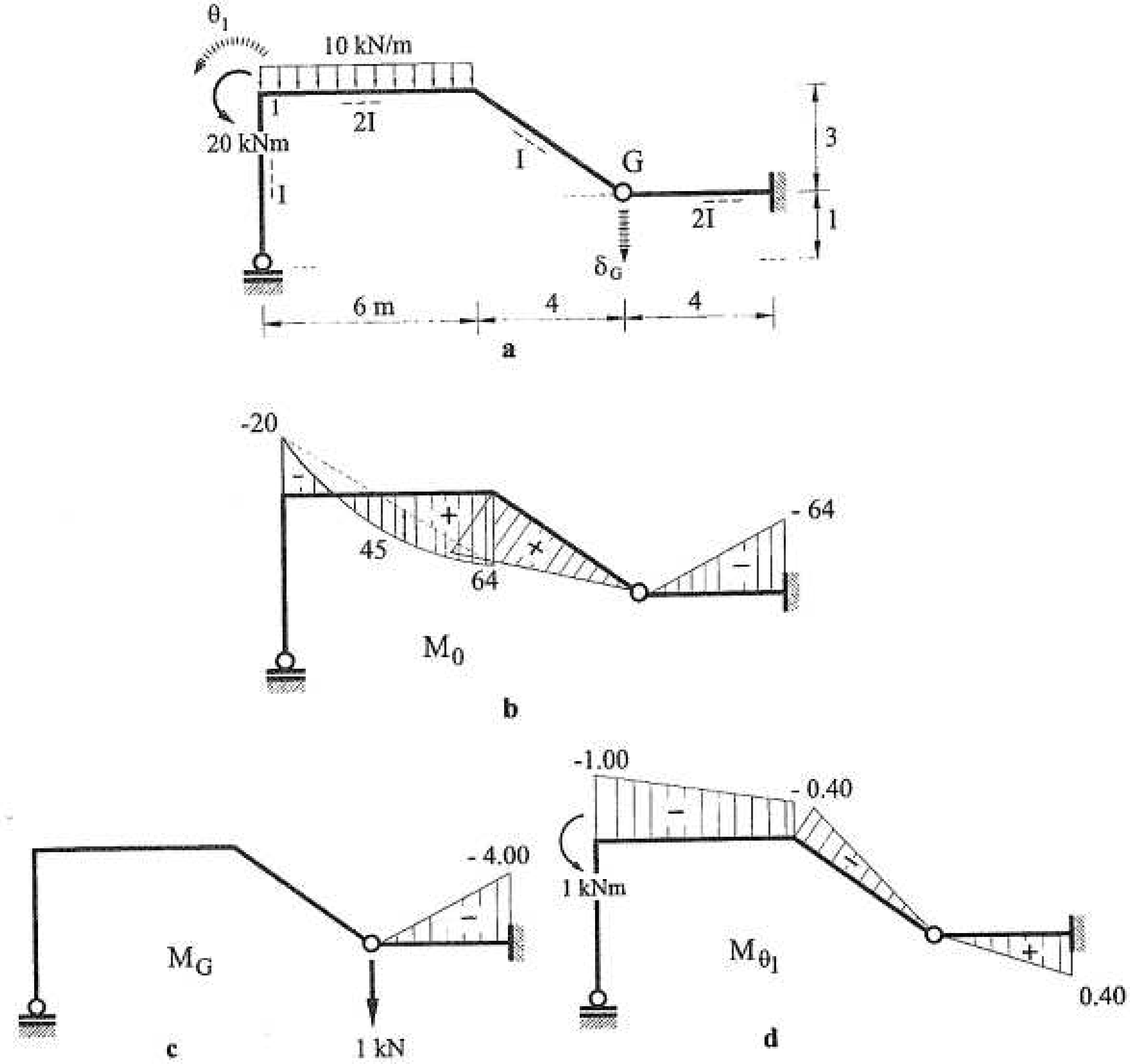
Şekil 5.19 I_c Karşılaştırma eylemsizlik momentleri ve $[I_c/I]$ oranları

Sayısal Uygulama 1

Çubuklarının eğilme rijitlikleri seçilmiş olan aşağıdaki izostatik sistemin G noktasında oluşacak δ_G düşey yerdeğiştirmesi ile 1 numaralı düğüm noktasındaki θ_1 dönmesinin,

a) EI cinsinden

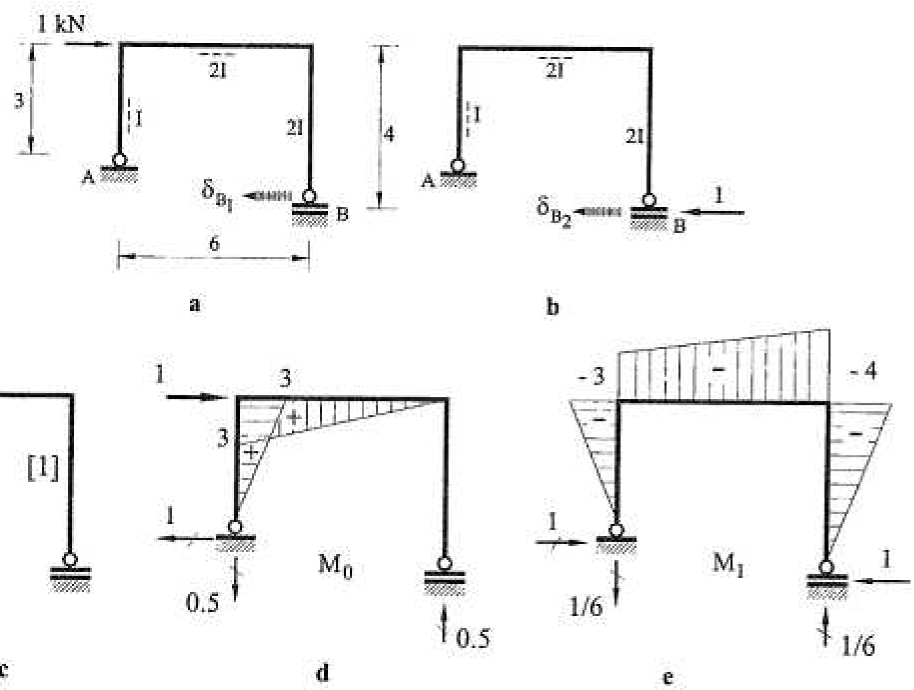
b) $I_c = 2I$ alınarak EI_c cinsinden elde edilmesi.



Şekil A

Sayısal Uygulama 2

Şekil A_a ve A_b'de verilen iki ayrı yüklemeden dolayı, aynı şekiller üzerinde gösterilmekte olan δ_{B1} ve δ_{B2} yerdeğiştirmelerinin $I_c = 2I$ alınarak EI_c cinsinden hesabının yapılması.

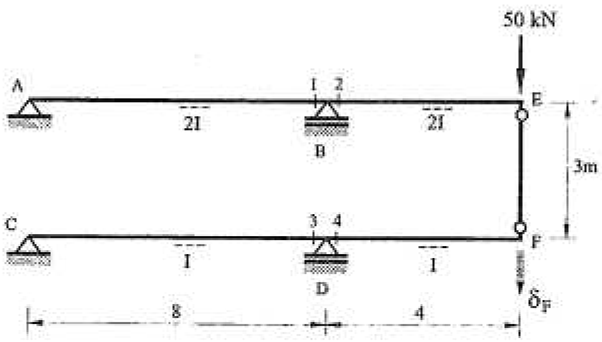


Şekil A

Sayısal Uygulama 3 [C2_SU_01 @]

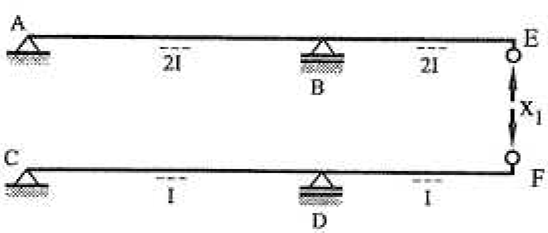
Geometrisi ve dış yükleri Şekil A'da verilen hiperstatik sistemin sadece eğilme şekildeğiştirmeleri göz önüne alınarak çözülüp,

- M eğilme momenti ve T kesme kuvveti diyagramlarının çizilmesi,
- EF gergisinin eksenel rijitliğinin $EF_{gergi} = EI/10$ olması durumunda, gergideki eksenel şekildeğiştirmelerin de hesaba katılarak M ve T diyagramlarının yeniden çizilmesi,
- F noktasındaki δ_F düşey yerdeğiştirmesinin EI cinsinden hesabı,
- B ve D mesnetlerindeki φ_{12} ve φ_{34} dönmelerinin EI cinsinden hesabı.

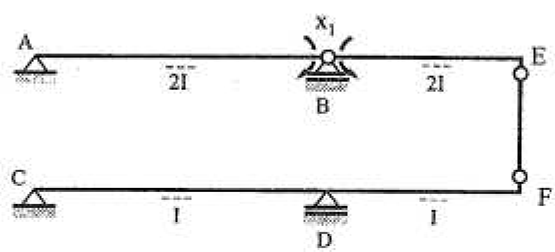


Şekil A

i. *İzostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyen seçenekleri*



Seçenek 1



Seçenek 2