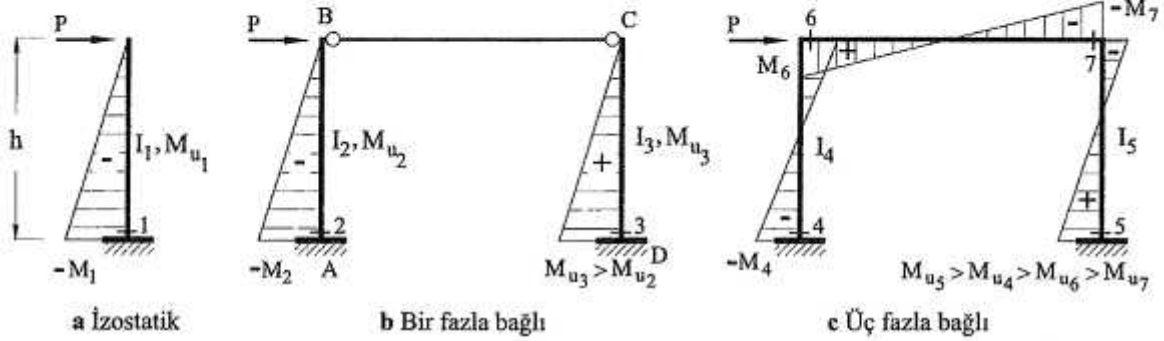


H PERSTAT K S STEMLER

İzostatik olan Şekil 5.1a'daki tek kolon, birbirine iki ucu mafsallı bir çubukla bağlanmış benzer iki kolon, Şekil 5.1b ve bu mafsalların kaldırılıp rijit birer birleşime dönüştürülmesi ile oluşturulan bir çerçevenin, Şekil 5.1c, artan yükler etkisinde sergileyeceği davranışlar birbirleriyle karşılaştırılacaktır.



Şekil 5.1 Farklı izostatik ve hiperstatik sistemlerde eğilme momenti diyagramları

Şekil 5.1a'daki izostatik sistemde, P yükünün artmasıyla I kesitinde oluşacak M_I momenti kesitin moment taşıma kapasitesi M_{u1} i aştığında kesit o moment etkisinde mafsal gibi davranarak değişen bir rijitlikle dönmeye başlayacak ve belirli bir miktar dönme sonrasında da sistem taşıyıcılığını yitirecektir. Kesit özelliklerine bağlı ve sınırlı olan bu momenti taşıyan özel mafsal Şekil 5.2a da içi dolu koyu bir daire olarak gösterilmiştir. Bu, tanımı daha önce yapılmış olan, bir plastik mafsaldır, Bkz. Bölüm IV.4.2.

Artan yatay P yükleri etkisindeki Şekil 5.1b'de yer alan ve bir fazla bağlı nedeniyle birinci dereceden hiperstatik olan sistemde ise 2 kesitindeki momentin taşıma kapasitesine ulaşması ve 2 kesitinin mafsallaşarak dönmeye başlaması durumunda da sistemin taşıyıcılığını kaybetmediği ve ABC üç mafsallı çerçevesinin CD konsolunca mesnetlendiği sürece de taşıyıcılığını koruyacağı anlaşılmaktadır; çünkü $M_{u3} > M_{u2}$ seçilmiştir, Şekil 5.2b₁. Ancak artan P yükleri nedeniyle CD konsolunun 3 kesitinde de moment taşıma kapasitesine ulaşırsa, yani Şekil 5.2b₂ deki duruma gelinirse, sistem yine eksik bağlı oynak bir mekanizma durumuna gelecek yani taşıyıcılığını ancak o zaman yitirecektir. Bir fazla bağlı olan bu sistemde, bir elemanın bir kesiti artık yük taşıyamayacak duruma gelse bile sistemin taşıyıcılığı bir süre daha yükler artarken devam etmiş, iç kuvvet dağılımı değişmiş olacak, ancak bu hiperstatik sistem Şekil 5.1a'daki izostatik sistem kadar çabuk göçme durumuna gelmeyecektir. Nitekim 3 . dereceden hiperstatik olan Şekil 5.1c'deki sistemde taşıyıcılığın kaybolması için dört kesitte moment taşıma kapasitesine ulaşılması gerekmektedir. Şekil 5.2c'de bir örnek mekanizma durumu seçilerek çizimsel olarak gösterilmektedir. Hiperstatik oluş, *kesit şekil değiştirme kapasiteleri* aşılmadıkça artan yükler etkisindeki sistemin olası bir mekanizma durumuna gelerek, artık taşıyıcı olmayan oynak bir sisteme dönüşmesini geciktirebilmektedir, Bkz Bölüm IV.4.2.

Fazla bağlarla sağlanan hiperstatik oluş; sistemde *yerdeğiştirmeleri sınırlayıp, yük taşıma kapasitesini artırırken sistemin bütününe yönelik yerdeğiştirme sünekliğinin artması* yönünde de etkili olmaktadır. Buna karşılık izostatik sistemlerin iç kuvvetleri üzerinde etkili olmayan *sıcaklık değişimleri ile mesnet çökmeleri* hiperstatik sistemlerde iç kuvvet ve yerdeğiştirme oluşturacaktır. İzostatik sistemlerde dış etkilerin mesnetlere doğru aktarılmasında izlenecek tek yörünge varken hiperstatik sistemlerde farklı yörüngeler oluşabilmekte ve bundan yararlanılabilmektedir. Nitekim Şekil 5.3 deki sistemde dış ortama eklenen kuvveti ile doğrudan yük aktaran alt kat kolonu çarpma ya da patlamanın etkisiyle ortadan kalkınca bu yük, hiperstatiklik dolayısıyla başka bir yol izleyerek dış ortama aktarılabilmektedir.

Çarpma, patlama, yangın vb. nedenlerle ortaya çıkan ani bölgesel göçmelerin, başka elemanların göçmelerini tetiklemesi olasılığı yapı mühendisinin göz önünde bulundurması gereken başka bir olgudur. Örnek vermek gerekirse kendi kotundaki düşey yükleri taşımak üzere tasarlanmış bir kat kirişi, bir nedenle kırılıp alt kata düşerse, o kattaki kiriş de bu yükü taşıyamayarak bir alt kata düşerse *ardışık göçme* olayı tetiklenmiş olacaktır. 11 Eylül 2001 de yıkılan New York'taki *Dünya Ticaret Merkezinde* böylesi bir tetiklemeyle genel çökmenin ortaya çıkmasına sistemin hiperstatik oluşu da engel olamamıştır. Bölgesel bağların gerekli yerlerde artırılarak böyle bir olasılığın azaltılması önerisi de yapı mühendisliğinin sorumluluk alanındadır.

Boyların istenilenden biraz kısa ya da uzun olması gibi sorunlarla karşılaşılabilen ön-üretim sistemlerde, elemanların birleşim yerlerinde zorlanarak bir araya getirilmesi gibi istenmeyen bağlantı düzensizliklerinin de hiperstatik sistemlerde ek iç kuvvetler ve yerdeğiştirmeler oluşturacağı unutulmamalıdır.

Hiperstatik sistemlerin çözümlenmesi amacıyla başvurulacak yöntemler *Kuvvet Yöntemleri* ve *Yerdeğiştirme Yöntemleri* olmak üzere iki kümede toplanabilmektedir.

Kuvvet Yöntemlerinde seçilen yeter sayıdaki mesnet tepkisi ve/veya kesit zoru problemin bilinmeyenleri olarak alınıp, çözümle belirlendikten sonra şekil ve yerdeğiştirmelerin hesabına geçilirken, *Yerdeğiştirme Yöntemlerinde* sistemin şekildeğiştirme durumunu tanımlamaya yetecek sayıda düğüm noktası yerdeğiştirmesi bilinmeyen olarak alınıp öncelikle bu bilinmeyenler belirlendikten sonra iç kuvvetlerin ve şekildeğiştirmelerin hesabına geçilmektedir.

Bir miktar uç kuvvet ile bir miktar yerdeğiştirmeyi bilinmeyen olarak seçen *Başlangıç Değerleri Yöntemi* bu kitabın kapsamı dışındadır, [Çakıroğlu, 1992], [Çakıroğlu vd., 1992]. Yukarıda sözü edilen genel yöntemler izlenerek oluşturulacak denklem takımlarının *doğrudan doğruya* ya da enerji teoremlerinden yararlanılarak *dolaylı biçimde* yazılıyor olmalarına göre kuvvet ve yerdeğiştirme yöntemleri *direkt ve indirekt kuvvet ve yerdeğiştirme yöntemleri* isimlerini alırlar.

Burada *direkt kuvvet yöntemi* ve *direkt yerdeğiştirme yöntemleri* üzerinde durulacak ve onlardan kısaca *kuvvet ve yerdeğiştirme yöntemleri* olarak söz edilecektir.

Bu iki genel yöntem birbirleri ile karşılaştırılırken göz önünde bulundurulması gereken önemli noktalar arasında, *i – Bilinmeyen sayıları*, *ii – Denklem takımlarının kurulmasındaki*

zorluk ya da kolaylıklar, iii – Ortaya çıkan denklem takımının kararlılığı ve çözümündeki kolaylıklar yer almaktadır.

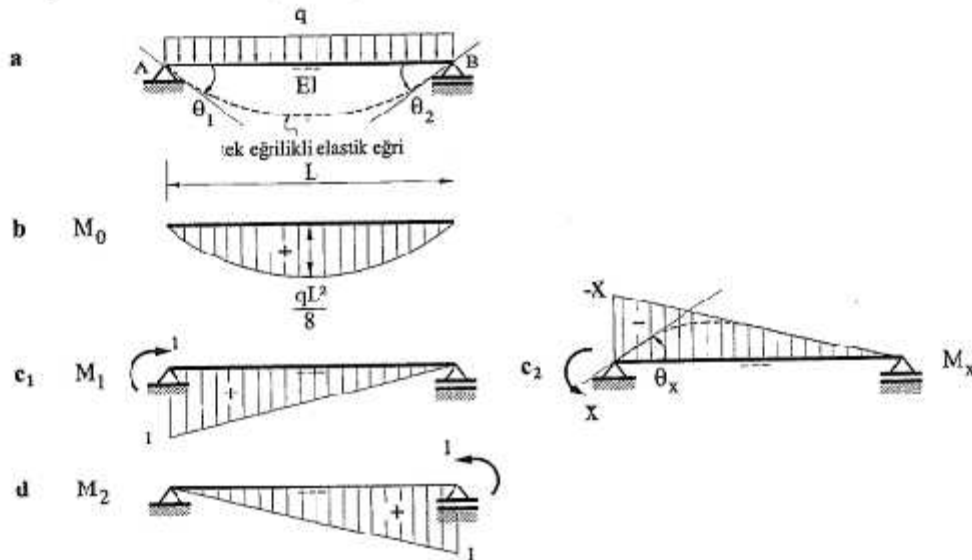
Konu bu açıdan değerlendirildiğinde, çok çubuklu çerçeve sistemler için bilinmeyen sayısı kuvvet yönteminde az olurken bir düğüm noktasında birleşen eleman sayısının arttığı bazı sistemlerde de yerdeğiştirme yöntemi bilinmeyen sayıları daha az olabilmektedir. Kuvvet yöntemi, bilinmeyenlerin seçimindeki esnekliğe bağlı olarak denklem takımının kararlılığını, bant matris oluşturabilmenin kolaylığını ve daha güvenilir çözümlere ulaşılmasını sağlarken; sistematik kurulabilen yerdeğiştirme yöntemi denklemlerinin kolay yazılışı ile karşılaştırıldığında, ona göre daha fazla deneyim gerektirmektedir. Her iki yöntemin de bilgisayar aracılığı ile uygulamada etkin biçimde kullanılabilmesini sağlamak üzere geliştirilmeleri yönünde çeşitli çalışmalar yapılmış ve yapılmaktadır. Bkz. Bölüm V.3, [Çakıroğlu, 1966].

V.1 – HİPERSTATİK SİSTEMLERİN KUVVET YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLENMESİ

V.1.1 – Başlangıç

Tam Bağlı Sistemlerin Yerdeğiştirme Hesaplarından Fazla Bağlı Sistemlerin Hesabına Geçiş ve Sistem Davranışı

- a. Anlatımda basitliği korumak üzere düzgün yayılı q yükü etkisindeki, EI eğilme rijitliği, L açıklığı boyunca sabit olan, bir basit kiriş örnek olarak incelenecektir, Şekil 5.4a. Bu örneğin birinci aşamasında kirişin A ve B mesnetlerindeki θ_1 ve θ_2 dönmeleri, virtüel iş teoremi yardımıyla bulunacak bu amaçla da Şekil 5.4b deki M_0 dış yük moment diyagramı ile hesabın öngördüğü, aranan yerdeğiştirmeler doğrultusunda onlara uygun birim yüklemelerden oluşan M_1 ve M_2 diyagramları kullanılacak, Şekil 5.4c₁,c₂.



Şekil 5.4 Düzgün yayılı yük etkisindeki basit kiriş

$$\theta_1 = \int M_0 M_1 \frac{dx}{EI} , \theta_2 = \int M_0 M_2 \frac{dx}{EI} \quad (5.1)$$

çarpımları ile aşağıdaki dönmelere ulaşılabacaktır.

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{3} \times L \times 1 \times \frac{qL^2}{8} \times \frac{1}{EI} = \frac{qL^3}{24EI} \quad (5.2)$$

- b. θ_1 mesnet dönmesini sıfır yapmak üzere A mesnetine uygulanması gereken X dış momenti ne kadar olmalıdır? Örneğin ikinci aşaması bu sorunun yanıtını aramaya yöneliktir. θ_1 'i sıfır yapmak üzere A mesnetine uygulanması gereken X momenti Şekil 5.4c₁ deki birim moment yüklemesinin tersi yönde olmalıdır, Şekil 5.4c₂. Bu yüklemeden oluşacak θ_x dönmesinin virtüel iş teoremi ile hesabı için A noktasına yapılacak, aranan dönme doğrultusundaki, birim yükleme diyagramını yeniden oluşturmaya gerek bulunmadığı açıktır; o diyagram Şekil 5.4c₁'deki diyagramın ters işaretli olanıdır ve M_x diyagramı ile çarpılırsa θ_x için,

$$\theta_x = \int M_x (-M_1) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{3} \times L \times (-1) \times (-X) \times \frac{1}{EI} = \left(\frac{L}{EI} \right) X \quad (5.3)$$

değerine ulaşılabacaktır.

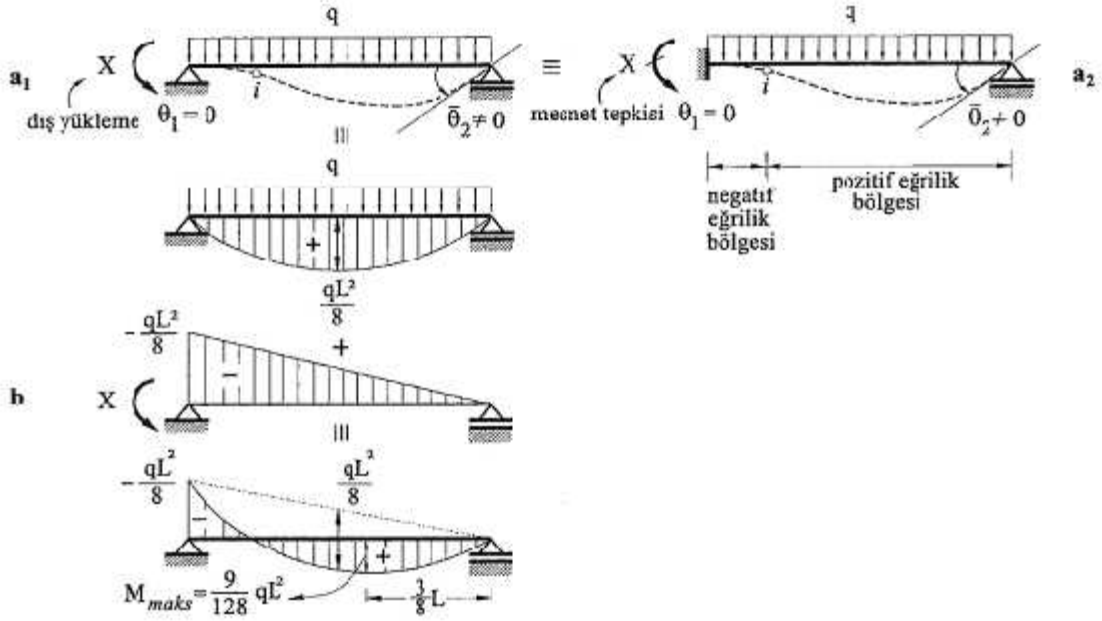
θ_x 'in θ_1 'e eşit olması halinde ters yönlerde oluşan bu dönmelerin toplanması A mesnetindeki dönmeyi sıfır yapacaktır. Dolayısıyla,

$$\theta_1 = \theta_x , \quad \frac{qL^3}{24EI} = \frac{L}{3EI} X , \quad X = \frac{qL^2}{8} \quad (5.4)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonucun EI dan bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir.

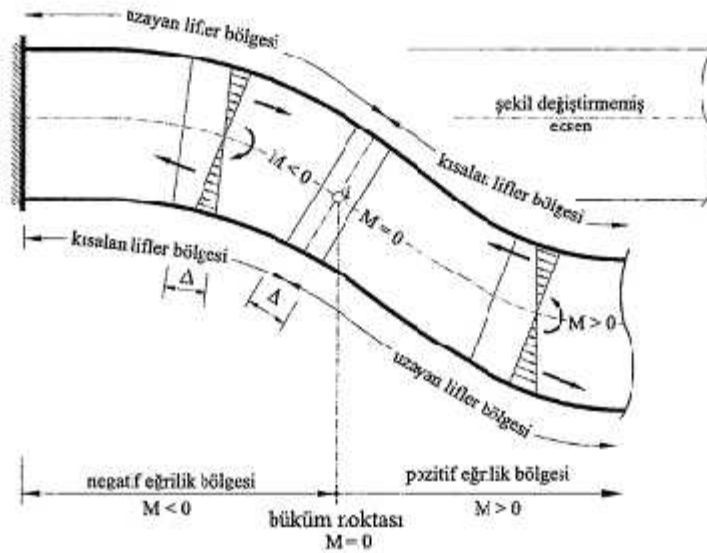
- c. q düzgün yayılı yükü ve X dış momentinin sisteme birlikte etkiliyor olması durumundaki moment diyagramına Şekil 5.5b'de çizimsel yolla gösterilen toplama ile ulaşılabilecektir. Ayrıca bu durumda A mesnetindeki dönme sıfır olacağına göre kiriş elastik eğrisinin o noktadaki teğeti yatay olacaktır, Şekil 5.5a₁. Bu durum Şekil 5.5a₂'deki mesnetlenme koşullarına özdeştir. Şekil 5.5a₂'deki bu sistem bir fazla bağlı sistemdir. Çözümü için denge denklemlerinin yeterli olmadığı açık olan bu sistemin çözümü amacıyla yukarıdaki işlem dizisi tersine izlenebilecek ve bu yol ilerdeki bölümlerde hiperstatik sistemlerin kuvvet yöntemiyle çözümü için ayrıntılandırılarak işlenecektir.
- d. Ancak yukarıdaki örnekte sergilenmekte olan bir noktaya daha dikkati çekmek önemlidir; Şekil 5.4a'da tek eğrilikli elastik eğri, X yüklemesinden sonra iki eğrilikli bir elastik eğriye dönüşmüştür. Eğriliklerin birbirine dönüştüğü i büküm noktası Şekil 5.5a₁ ve a₂'de gösterilmektedir.
- e. Şekil 5.5a₁ veya a₂'deki i büküm noktasının yakın çevresi Şekil 5.6'da büyütülerek yeniden göz önüne alınmaktadır. Amaç, kesitte tarafsız eksene göre uzayan ve kısalan liflerle bu şekildeğıştirmelere bağlı olarak ortaya çıkan gerilmeler ve onların bileşkelerinin oluşturduğu kuvvet çiftlerine yani bir iç kuvvet olarak momentlere daha yakından bakmak ve onları eğriliklerle ilişkilendirmektir. i büküm noktasının solunda

kalan bölgede üst lifler uzarken alt lifler kısalmakta ve bunların oluşturduğu gerilmeler kesitte bir negatif momentle sonuçlanmaktadır.



Şekil 5.5 Düzgün yayılı yük etkisindeki bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kiriş

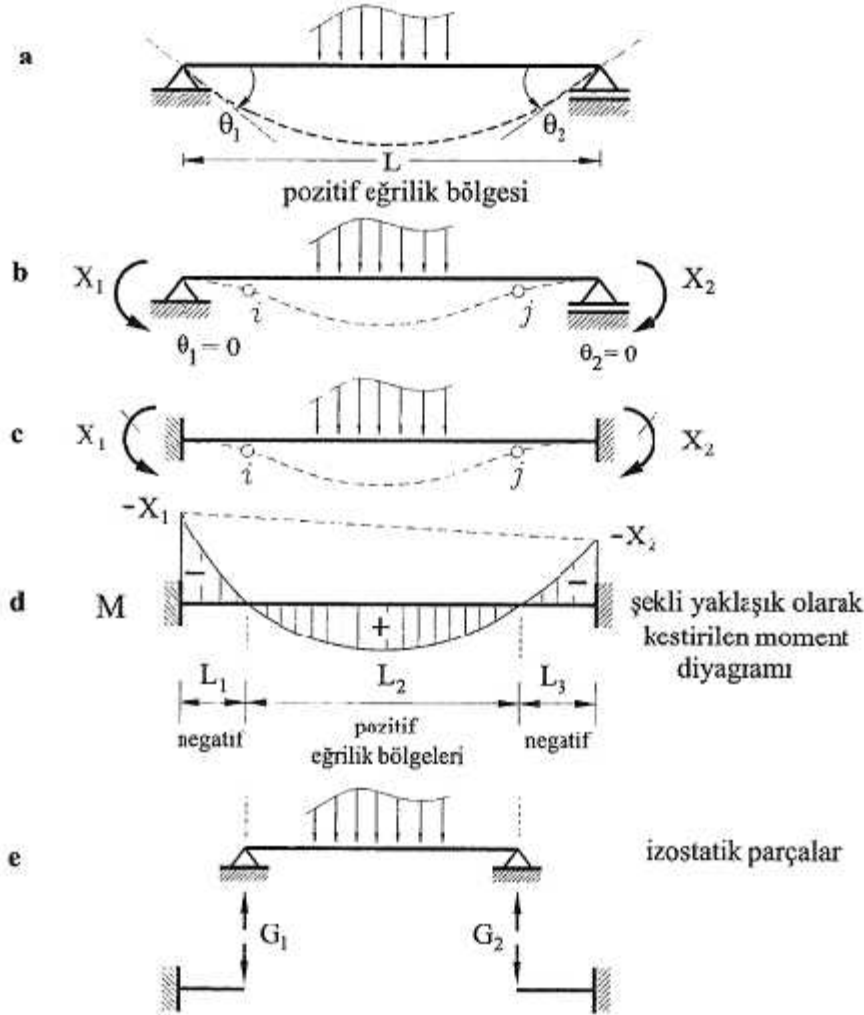
Tarafsız eksenin altındaki ve üstündeki liflerin boy değişimleri i büküm noktası civarında sıfırlandıktan sonra i nin sağ tarafında tersine dönmeye başlamakta yani bu kez üst lifler kısalırken alt lifler uzamakta ve bunların oluşturduğu gerilmeler kesitte *pozitif momentle* sonuçlanmaktadır. i büküm noktası kesitinde lif boylarında değişim olmadığı için moment de meydana gelmemektedir. Bu açıklamalar Şekil 5.5b'deki moment diyagramı ile birlikte değerlendirilmelidir.



Şekil 5.6 i büküm noktası ve yakın çevresi

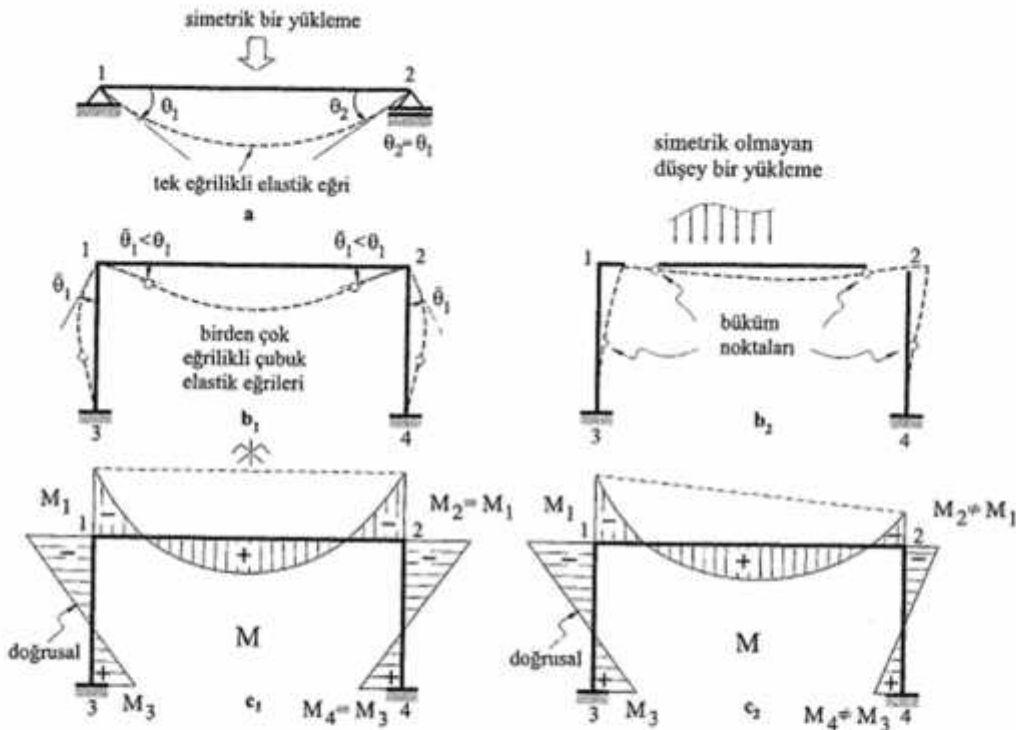
- f. Sınır koşullarına uyarak oluşmak durumundaki elastik eğri, yaklaşık olarak kestirilebilirse sistemde ortaya çıkacak moment diyagramının şekli de belirlenebilecek-

tir. Nitekim Şekil 5.4a'daki basit kirişin sadece θ_1 mesnet dönmesi değil, θ_2 mesnet dönmesi de sıfır yapılacak şekilde B mesnetine bir moment yüklemesi daha gerçekleştirilirse bu yükleme B mesnetine doğru da bir negatif eğrilik bölgesi oluşturulacaktır, Şekil 5.7b. Mesnetlerdeki dönmeleri sıfırlanmış olan bu sistem Şekil 5.7c'deki sisteme özdeştir. Fazla bağlı olan bu sistemin çözümünü yapmadan olası elastik eğriye göre belirlenecek pozitif ve negatif eğrilik bölgelerine dayanarak moment diyagramlarının yaklaşık şekli saptanabilecektir; Şekil 5.7d buna örnektir. Açıklıktaki eğrilğe karşılık gelen ve seçilen eğilme yönüne göre pozitif olan momentler, mesnetlere doğru eğrilik yön değiştirince negatife dönecektir. Yaklaşık moment diyagramlarının kestirilebilmesi sistemin olası davranışını anlamak ve özellikle ön boyutlandırma açısından önemlidir, Bölüm IV.1.3.1. Böylelikle fazla bağlı sistemleri uygun görülen bazı noktalarından kesip yaklaşık olarak basit izostatik sistemlere ayırmak mümkün olabilmektedir, Şekil 5.7e. Nitekim iki ucu ankastre kiriş yerine burada olası moment sıfır noktaları arasında bir basit kirişle onun tepkilerini karşılayacak iki konsol kiriş önerilebilmektedir. İzostatik bu parçaların çözümü ile Şekil 5.7d'deki M diyagramı yaklaşık olarak elde edilebilecektir, Bölüm IV.1.3.1, IV.1.3.2.



Şekil 5.7 Basit kirişten iki ucu ankastre mesnetli kirişe geçiş

- g. Şekil 5.4a' daki basit kiriş mesnet dönmeleri bazen o örnekte olduğu gibi sıfıra kadar indirilemese de, basit kirişin mesnetlerine birleşen başka çubukların eğilme rijitliklerine bağlı olarak azaltılabilirler, Şekil 5.8a,b. Bu durumda da basit kirişin tek eğrilikli elastik eğrisi yerini birden çok eğrilikli bir elastik eğriye bırakmaktadır. Düğüm noktalarına birleşen tüm çubukların, *düğüm noktası süreklilik koşulu* nedeniyle, Bkz. Bölüm II.4.3, aynı dönmeyi yapacakları düşünülürse ve sınır koşulları da göz önünde tutulursa Şekil 5.8b₁' deki çerçeve simetrik düşey yükler etkisinde, Şekil 5.8b₁' deki gibi simetrik bir elastik eğri oluşturacaktır. Eğriliklerin değiştiği, olası büküm noktaları da simetrik ve simetrik olmayan yüklemeler için yaklaşık olarak Şekil 5.8b₁ ve b₂'de gösterilmiştir. 1 ve 2 düğüm noktalarına birleşen iki çubuğun uçlarındaki momentlerin de, o noktada bu örnekte olduğu gibi bir dış yüklemeye olmadığı takdirde, eşit değerler alacağı göz önünde tutulursa Şekil 5.8c₁ ve c₂' deki gibi moment diyagramlarının ortaya çıkacağı kestirilebilecektir. Sistemdeki yükün simetrik olmaması durumunda kiriş, kolonlar üzerinde az da olsa bir yatay yerdeğiştirme yapabilir; ancak moment diyagramının olası şekli önemli değişim göstermez, Şekil 5.8c. Bu çerçeve örneğinde kolonlar üzerinde yük bulunmadığı için moment diyagramının o bölgelerde doğrusal değişeceği ve elastik eğri üzerinde bir büküm noktası bulunduğundan işaret değiştirmesi gerektiği görülmektedir. 3 ve 4 mesnetlerinin dönmüyor olması, 1 ve 2 düğüm noktalarında ise bir miktar dönme bulunması büküm noktasını kolon orta yüksekliğinin altına çekmektedir. Dolayısıyla 3 ve 4 kesitlerindeki momentler 1 ve 2' dekilerden küçük olmak zorundadır.

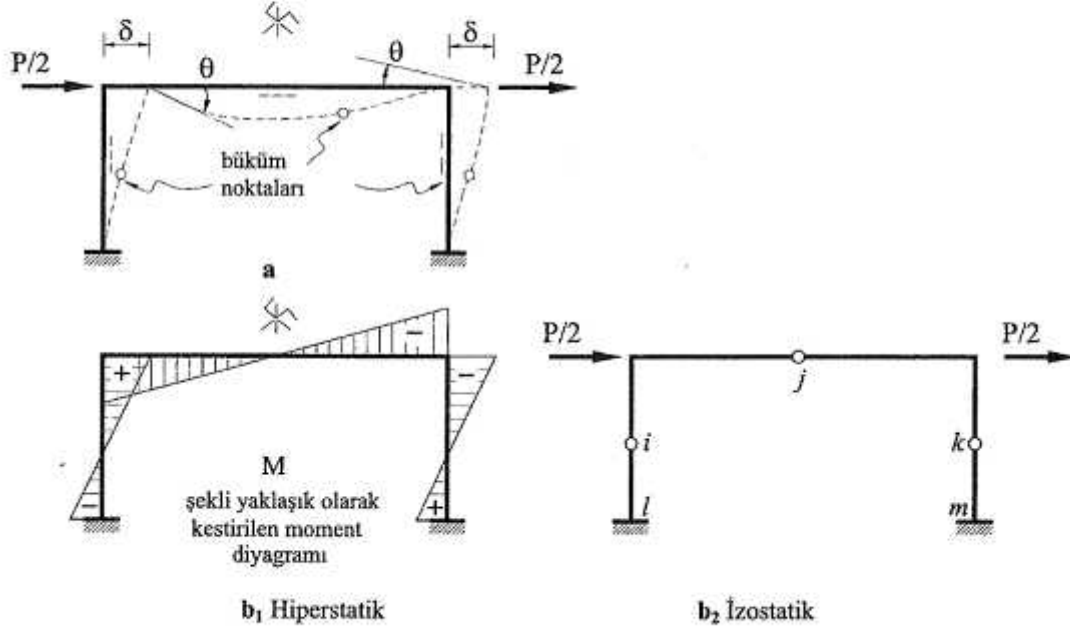


Şekil 5.8 Düşey yükler etkisindeki bir ankastre çerçeve

- h. Aynı düşüncelerle Şekil 5.8b₁'deki çerçevenin sadece antisimetrik yatay yüklerin etkisinde bırakıldığı durum da incelenerek, olası moment diyagramının şekli kestirilebilecektir, Şekil 5.9a,b₁. Çubuklar üzerinde yük bulunmaması olası moment diyagramı parçalarının hep doğrusal olmasını gerektirecek ve şekildeğiştirmenin

antisimetrik olması nedeniyle olası moment diyagramının da bu simetrik sistemde, mutlaka antisimetrik olması sonucunu ortaya çıkaracaktır.

Ulaşılan moment sıfır noktaları göz önüne alınarak, yatay yükler için yaklaşık hesap amacıyla, fazla bağlı sistemler de, küçük izostatik parçalara ayrılabilir. Şekil 5.9b₂. Nitekim bu örnekte iki mesneti de ankastre olan hiperstatik çerçeve yerine, *i-j-k üç mafsallı çerçevesi* ile onun *i* ve *k*'daki mesnet tepkilerini karşılayacak *i-l* ve *k-m konsol parçaları* yaklaşık olarak önerilmiş olmaktadır.



Şekil 5.9 Antisimetrik yatay yükler etkisindeki bir ankastre çerçeve