İşaret ve Sistemler

Ders 10: Sistem Cevabı

Sistemin İmpuls Cevabı

- Lineer, zamanla değişmeyen bir sisteme v(t) işaretinin uygulandığını düşünelim. v(t) işareti lineer, zamanla değişmeyen bir sisteme uygulandığında çıkış işareti bilinmiyorsa, sistemin lineerlik özelliğini kullanabiliriz.
- Lineerlik özelliğinden, giriş işaretini basit işaretlere ayrıştırırız. Bu basit işaretler ayrı ayrı sistemin girişine uygulandığında, sistemin her bir girişe cevabı bilindiğinden, sistemin girişe cevabı, bu bilinen çıkışların toplamı olacaktır.

Sistemin İmpuls Cevabı

- v(t) işaretini Fourier Serisi veya Fourier Dönüşümü ile fazörlerin veya sinüzoidal işaretlerin toplamı şeklinde yazarsak;
- Trigonometrik Fourier serisi,

$$v(t) = A_o + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[A_n.Cos(nw_o t) + B_n.Sin(nw_o t)\right] \qquad A_0 = \frac{1}{T_o}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t).dt$$

$$A_n = \frac{2}{T_o}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t).Cosnw_o t.dt \qquad B_n = \frac{2}{T_o}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t).Sinnw_o t.dt$$

- Üstel Fourier serisi,

$$\mathrm{v(t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n.e^{jnw_0 t} \qquad c_n = \frac{1}{T_o}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t).e^{-jnw_0 t}dt$$

Sistemin İmpuls Cevabı

- Fourier ve ters fourier dönüşümleri ise,

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f).e^{jwt} df \quad , \qquad V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t).e^{-jwt} dt$$

formülleriyle gösterilebilirler. v(t) işareti Fourier serisi açılımı ya da Fourier dönüşümü ile basit üstel fonksiyonların toplamı olarak ifade edilebilir.

- Herhangi bir v(t) işareti, impuls işaretlerinin toplamı olarak ifade edilebilir.

Sistemin İmpuls Cevabı

- İmpuls işaretinin örnekleme özelliğini kullanarak, herhangi bir v(t) işareti aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau).\delta(t-\tau).d\tau$$

- Bir ifadenin limiti,

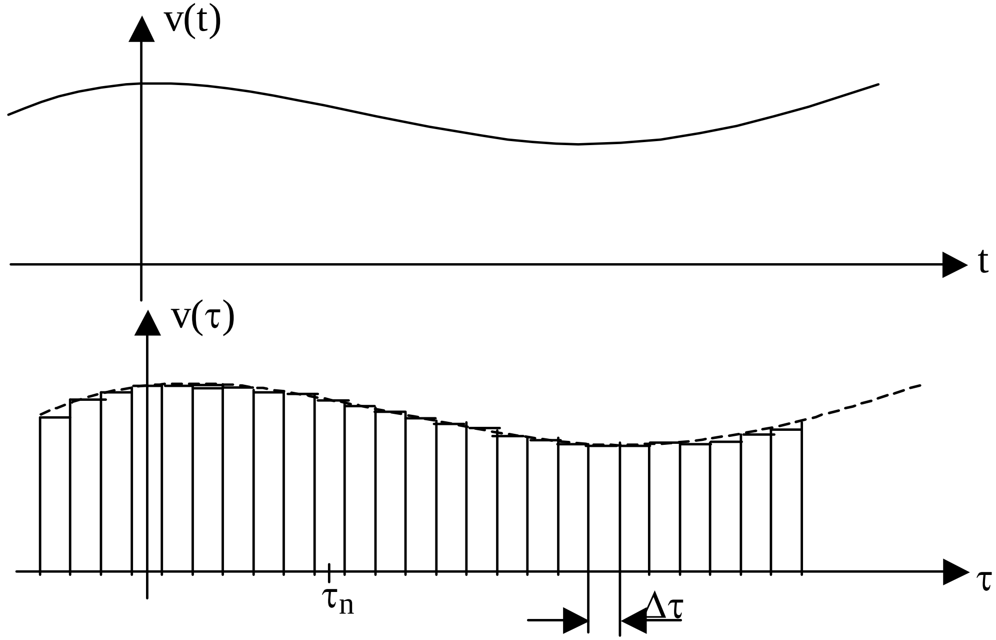
$$\int_{a}^{b} f(x).dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k).\Delta x_k$$

formülüyle ifade edilebilir.

Sistemin İmpuls Cevabı

- Bu limit işlemini v(t) işaretine uygularsak;

$$v(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [v(\tau_n).\Delta\tau].\delta(t-\tau_n)$$ ifadesi elde edilir.



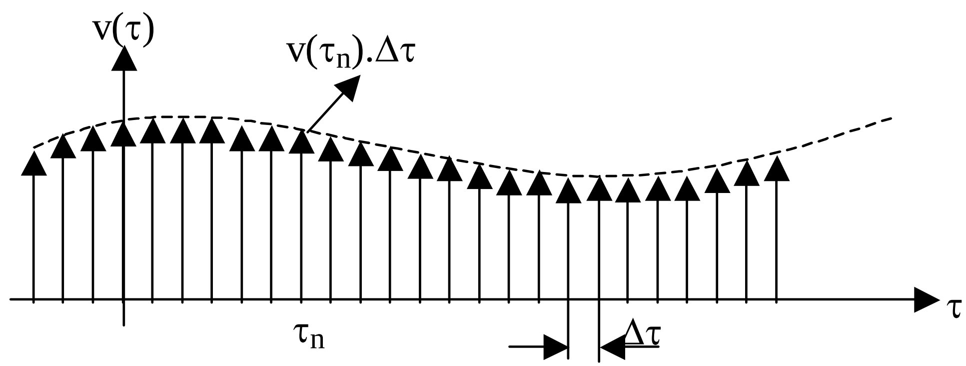
- Şekil 1: v(t) işaretinin ayrık işarete dönüştürülmesi

Sistemin İmpuls Cevabı

- Bu ifadeye göre v(t), impuls işaretlerinin toplamının limitidir. $t = \tau_n$ anlarındaki impuls işaretleri, limit işlemini v(t) işaretine uygularsak;

$$t = \tau_n \quad \Rightarrow \quad v(\tau_n).\Delta\tau$$

- genlik değerini almaktadır. İmpulsları genlik değerleriyle gösterirsek Şekil 1'deki işaret Şekil 2'ye dönüşür.



Şekil 2: v(t) işaretinin impuls işaretleriyle örneklenmesi

Sistemin İmpuls Cevabı

- Böylece v(t) işareti, τ_n impuls fonksiyonlarının toplamı şeklinde $v(\tau_n)$ işareti edilmiş olur. Şimdi impuls işaretine sistemin cevabını araştıralım:
- Genel olarak lineer ve zamanla değişmeyen bir sistemin, bir impuls işaretine cevabı, sistemin impuls cevabı olarak tanımlanır ve şöyle tarif edilir:
- Sistemin impuls cevabı (Impulse Response): Lineer ve zamanla değişmeyen bir sistemin girişine τ anında uygulanan impuls işaretine, sistemin t anında verdiği cevap sistemin impuls cevabı olarak bilinir ve $h(t,\tau)$ ile gösterilir.

Sistemin İmpuls Cevabı

$\delta(\tau) \longrightarrow$ LİNEER ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEM $\longrightarrow h(t,\tau)$

- Sisteme τ anında uygulanan impuls, sistemin cevabı, $h(t,\tau)$ ' dur. Sistemin girişine uygulanacak v(t) işareti τ_n anlarında genlikleri $v(\tau_n).\Delta\tau$ olan impulsların toplamı şeklinde ifade edilmişti. Sistemin bu impuls işaretlerine cevabı lineerlik özelliği kullanılarak bulunabilir. Yani v(t) girişine sistemin cevabı;

$$y(t) = \underset{\Delta\tau \to 0}{Lim} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [v(\tau_n).\Delta\tau].h(t,\tau)$$

elde edilir.

Sistemin İmpuls Cevabı

- Bu ifadede limit ve sonsuz toplam bir integralin tanımı olduğundan ifade,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau).h(t,\tau)d\tau$$ şekline dönüşür.

- Zamanla değişmeyen sistem, başlangıç durumu sabit tutularak, girişin zaman içinde geciktirilerek uygulanması, çıkışında zaman içinde aynı şekilde gecikerek elde edilen sistem olmasından dolayı, impuls cevabı h(t,τ) ifadesinin t ve τ değerlerine ayrı ayrı bağımlı olmayıp, aralarındaki farka, yani (t-τ)'ya bağlı olması anlamına gelir.
- İmpuls cevabı: $$h(t,\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

Sistemin İmpuls Cevabı

- Böylece sistemin cevabı zamanla değişmeyen sistemler için, $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau).h(t-\tau)d\tau$ olarak bulunur.

- Bu integral Fourier özelliklerinde görülen katlama (konvolüsyon) integralidir. Kısaca,

Lineer Zamanla Değişmeyen
(LZD) Sistem

$$v(t) \longrightarrow \boxed{\quad h(t) \quad} \longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau).h(t-\tau)d\tau = v(t)*h(t) = h(t)*v(t)$$

lineer zamanla değişmeyen sistemin çıkışı, girişine konvolüsyona bağımlıdır.

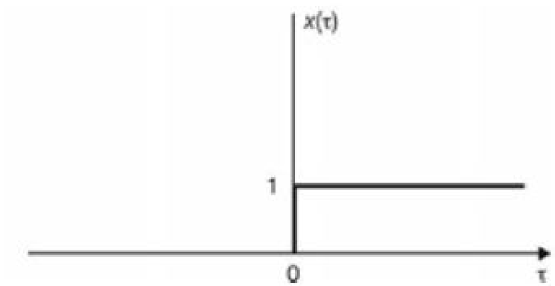
Örnek 10.1

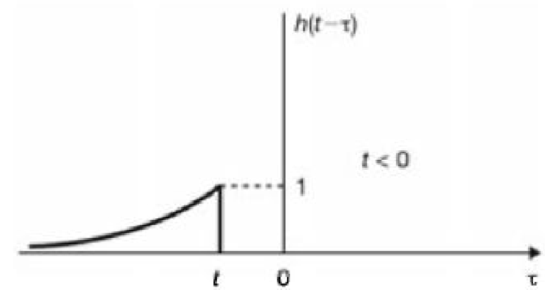
ÖRNEK : $x(t) = u(t)$ $h(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$ $y(t) = ?$

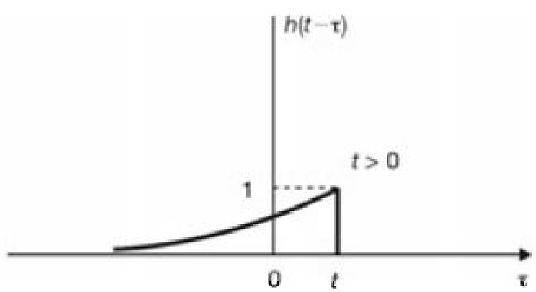
ÇÖZÜM: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-\alpha t}\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

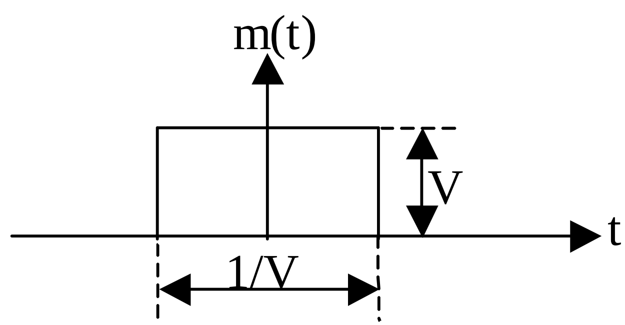






Sistemin Transfer Fonksiyonu

- h(t) impuls cevabı bilinen bir sisteme, uygulanan herhangi bir giriş işaretine sistemin cevabı konvolüsyon ile bulunmaktadır.
- Bir sisteme uygulanan impuls işaretine sistemin cevabı birim impuls cevabı olarak verilmişti. Pratikte birim impuls fonksiyonunu üretip sistemin impuls cevabı bulunabilir. Bunun için ancak, Şekil 3'deki darbe işaretinde $V \to \infty$ gitmesiyle birim impuls işareti elde edilebilir.



Şekil 3: İmpuls işaretini elde etmek için darbe işareti

Sistemin Transfer Fonksiyonu

- Böylece sistemin birim impuls cevabı bulunabilir. Böyle bir işaretin üretimi zor olduğundan bunun yerine daha kullanışlı yöntemler geliştirilmiştir.
- Sistemin çıkışı; $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau).h(t-\tau)d\tau$

ifadesinin frekans düzleminde ifadesini bulmak için Fourier Dönüşümü alınırsa;

$$F[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} y(t).e^{-jwt}.dt = \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} m(\tau).h(t-\tau)d\tau].e^{-jwt}.dt$$

$$t-\tau = u, \quad dt = du \qquad \Rightarrow \qquad Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} m(\tau).h(u).d\tau.e^{-jw(u+\tau)}.du$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau).e^{-jw\tau}.d\tau.\int_{-\infty}^{\infty}.h(u).e^{-jwu}.du$$

Sistemin Transfer Fonksiyonu

- Sonuç olarak $Y(f) = M(f).H(f)$ ifadesi elde edilir.
- Burada dikkat edilmesi gereken nokta çıkışın spektrumunun, giriş ve transfer fonksiyonunun çarpımı olmasına karşılık, sistemin bir çarpma devresi olmamasıdır.
- Bunun nedeni ise zaman düzlemindeki ifadenin yani y(t) işaretinin Fourier dönüşümünü alarak bu ifadenin bulunmasıdır. Dolayısıyla sistemi zaman düzleminde düşünerek, frekanstaki çarpmanın zamanda konvolüsyon olacağından aşağıdaki blok şema çizilebilir.

$$M(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)=M(f).H(f)$$

Sistemin Transfer Fonksiyonu

- İfadeden görüldüğü gibi M(f) ve H(f) ifadeleri sırasıyla m(t) ve h(t)'in Fourier dönüşümleridir. Lineer zamanla değişmeyen bir sistemin h(t) impuls cevabının Fourier dönüşümü;

$$H(f) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).e^{-jwt}\,dt$$

Yada $\quad Y(f) = M(f).H(f) \quad \Rightarrow \quad H(f) = \dfrac{Y(f)}{M(f)}$

ifadesi ile tanımlanıp sistemin transfer fonksiyonudur.

Sistemin Transfer Fonksiyonu

- H(f) transfer fonksiyonu, Bazı koşullar altında sistemin transfer fonksiyonu, H(s) transfer fonksiyonuyla da tanımlanabilir. Sistemin transfer fonksiyonu, H(s)'den,

$$H(f) = H(s)\big|_{s=jw}$$ ifadesi elde edilir.

- Bu eşitliğin geçerli olabilmesi için $t<0$ için $h(t)=0$ olan yani **nedensel sistemin** olması gerekmektedir.

Bir Devrenin Transfer Fonksiyonun Bulunması

- Direkt yöntem veya dolaylı yöntem kullanılabilir.

Direkt Yöntem:

- Her bir bobinin empedansı jWL,
- Her bir kondansatörün empedansı $\frac{1}{jwC} = -j\frac{1}{wC}$
- R direnç değeri R
- Giriş işaret kaynağı $V_i(f)$,
- Çıkış değişkeni $V_o(f)$,
- Çıkış işaretini giriş işareti cinsinden yazarız.
- Transfer fonksiyonunu bulmak için çıkışın girişe bölümünü elde ederiz.

$$H(f) = \frac{V_0(f)}{V_i(f)}$$

Bir Devrenin Transfer Fonksiyonun Bulunması

Dolaylı Yöntem:

- Lineer ve zamanla değişmeyen bir sistemin giriş işareti v(t) ve çıkış işareti y(t) olsun. v(t) ile y(t) arasındaki ilişki diferansiyel denklemlerden:

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \cdot + b_o y(t) = a_r \frac{d^r v(t)}{dt^r} + a_{r-1} \frac{d^{r-1} v(t)}{dt} + \cdot + a_o v(t)$$

yazılır. Böyle bir sistemde $n \geq r$ olabilir. n. dereceden sistem olarak isimlendirilir.

- Türevin Fourier dönüşümü, $F\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right] = (jw)^k X(f)$

- ifadesiyle verildiğinden, yukarıdaki giriş-çıkış ilişkisinin fourier dönüşümü

Bir Devrenin Transfer Fonksiyonun Bulunması

- Türevin Fourier dönüşümü,

$$F\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right] = (jw)^k X(f)$$

ifadesiyle verildiğinden, giriş-çıkış ilişkisinin fourier dönüşümü

$$\left[b_n(jw)^n + b_{n-1}(jw)^{n-1} + b_{n-2}(jw)^{n-2} + \cdot\cdot + b_o\right]Y(f) = \left[a_r(jw)^r + a_{r-1}(jw)^{r-1} + \cdot\cdot + a_o\right]V(f)$$

elde edilir.

- Çıkışın girişe oranı transfer fonksiyonuna eşit olduğundan:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{V(f)} = \frac{a_r(jw)^r + a_{r-1}(jw)^{r-1} + \cdots + a_o}{b_n(jw)^n + b_{n-1}(jw)^{n-1} + b_{n-2}(jw)^{n-2} + \cdots + b_o}$$

Transfer Fonksiyonunun Özellikleri

- H(f) genellikle karmaşık bir fonksiyondur ve üstel olarak;

  $H(f)=|H(f)|.e^{j\beta(f)}$ olarak yazılabilir.

- Transfer fonksiyonunun üç temel özelliği vardır. Bunlar;

1. Genlik spektrumu $|H(f)|=|H(-f)|$ çift simetri,
2. Faz spektrumu $\beta(f)=-\beta(f)$ tek simetri özelliği görülür.
3. Eğer, sistemin giriş işareti de üstel şekilde yazılırsa

$$V(f)=|V(f)|.e^{j\theta(f)}$$

olacağından sistemin çıkışı,

Transfer Fonksiyonunun Özellikleri

$$Y(f) = V(f).H(f) = |V(f)|.e^{j\theta(f)}.|H(f)|.e^{j\beta(f)}$$

$$Y(f) = |V(f)|.|H(f)|.e^{j(\theta(f)+\beta(f))}$$

elde edilir.

Sistemin çıkışının genlik spektrumu:

$$|Y(f)| = |V(f)|.|H(f)|$$

Faz spektrumu:

$$\phi(f) = \theta(f) + \beta(f)$$

olarak bulunur.

Transfer Fonksiyonunun Sistem Çıkışındaki Spektral Güce Etkisi

- Birim impuls cevabı h(t) olan sisteme v(t) işareti uygulanırsa, çıkış işareti,

$$y(t) = v(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau).h(t-\tau).d\tau$$

- veya frekans düzleminde ise h(t)'nin fourier dönüşümü H(f) ve v(t)'nin Fourier dönüşümüde V(f) olarak alınırsa çıkış işareti,

$$Y(f) = H(f).V(f)$$

olduğundan, sistemin giriş spektral enerji yoğunluğu $S_i(f)$ ise sistemin çıkış spektral enerji yoğunluğu $S_o(f)$,

$S_o(f) = |Y(f)|^2$ olur.

Transfer Fonksiyonunun Sistem Çıkışındaki Spektral Güce Etkisi

$$S_o(f) = |Y(f)|^2 = |H(f).V(f)|^2 = |V(f)|^2.|H(f)|^2 = S_i(f).|H(f)|^2 \quad \left[\frac{volt^2 sn}{Hz}\right]$$

Sistem çıkışının spektral enerji yoğunluğu bilindiğine göre çıkış enerjisi,

$$E_o = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(f).|H(f)|^2 df \quad \left[volt^2 sn\right]$$

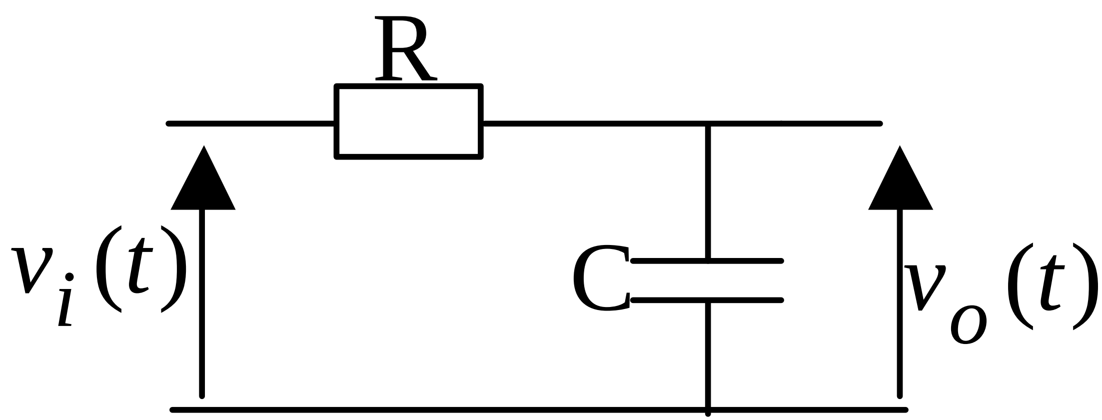
- Sistem çıkışının spektral güç yoğunluğu $G_o(f)$'de;

$$G_o(f) = G_i(f).|H(f)|^2 \quad \left[\frac{volt^2}{Hz}\right]$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} G_o(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} G_i(f).|H(f)|^2 df \quad \left[volt^2\right]$$

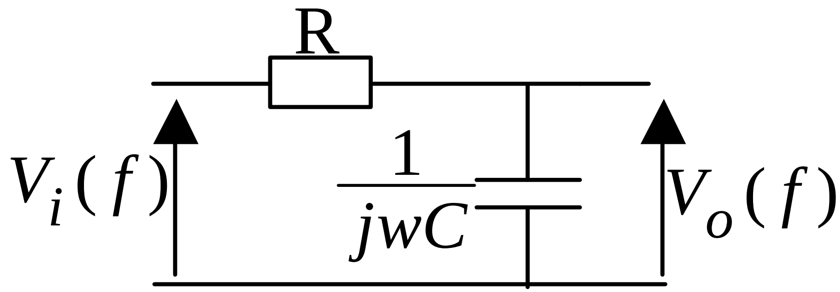
Örnek 10.2

Aşağıda verilen RC LPF sistemin transfer fonksiyonunu direkt olarak bulunuz.



Örnek 10.2

Devredeki elemanları frekans düzleminde yazarsak:



Sistemin çıkışını, giriş cinsinden bulalım.

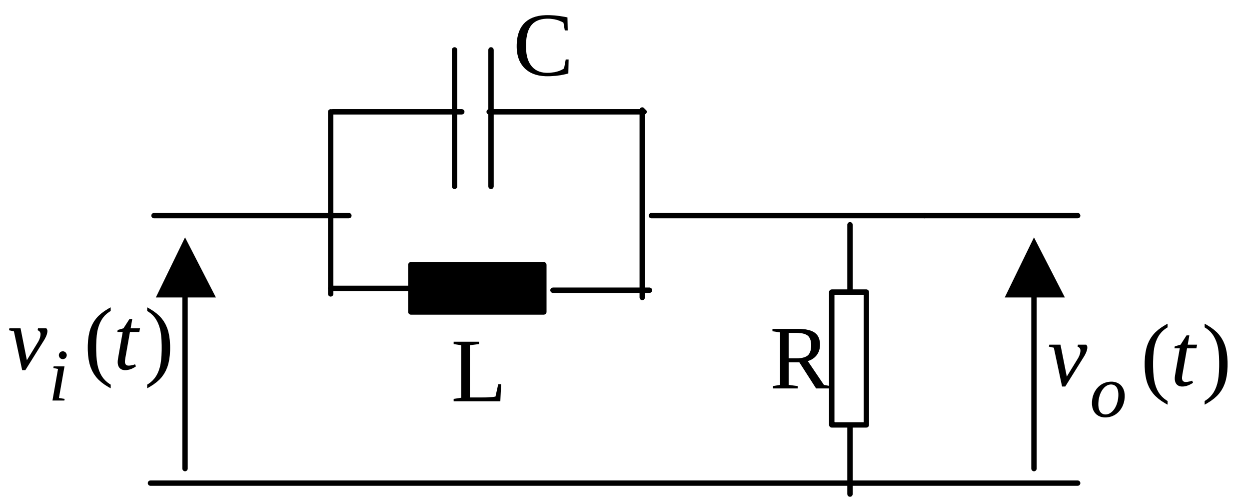
$$V_o(f) = \frac{1/jwc}{R + \frac{1}{jwC}} . V_i(f) = \frac{1}{1 + jwRC} . V_i(f)$$

Çıkışı girişe oranlayarak transfer fonksiyonu bulunabilir.

$$H(f) = \frac{V_0(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 + jwRC}$$

Örnek 10.3

Aşağıdaki şekilde RLC devresi verilmiştir. Transfer fonksiyonunu bulunuz.



Örnek 10.3

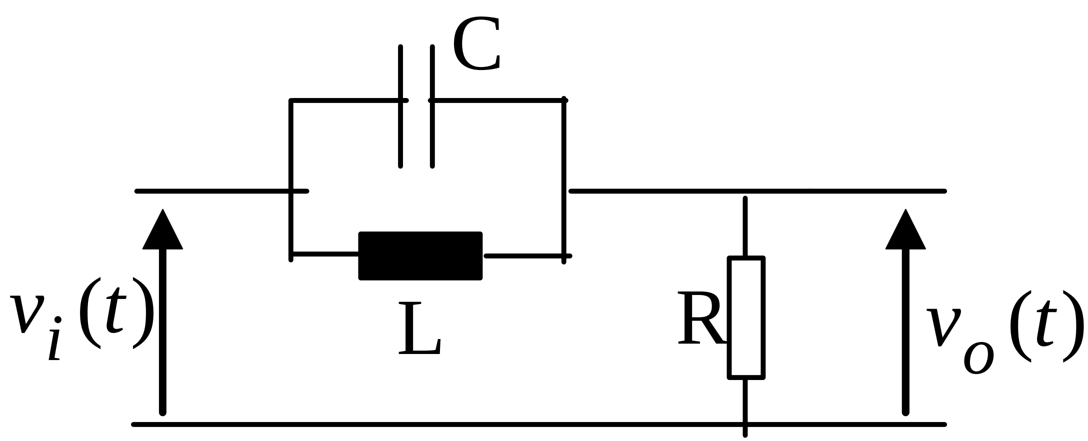
$$Z_1 = jwL \| 1/jwC = \frac{jwL \cdot \frac{1}{jwC}}{jwL + \frac{1}{jwC}} = \frac{jwL}{1 - w^2 LC}$$

$$V_o(f) = \frac{R}{Z_1 + R} V_i(f) = \frac{R}{R + \frac{jwL}{1 - w^2 LC}} . V_i(f) = \frac{R(1 - w^2 LC)}{R - w^2 RLC + jwL} . V_i(f)$$

$$H(f) = \frac{V_o(f)}{V_i(f)} = \frac{1 - w^2 LC}{1 - w^2 LC + j\frac{wL}{R}}$$

Örnek 10.4

Aşağıdaki şekilde RLC devresi verilmiştir. Lineer zamanla değişmeyen (LZD) sistemin diferansiyel denklemlerden yararlanarak H(f)'i bulunuz.



Örnek 10.4

Durum denklemleri ile devrenin akımlarının toplamını yazarsak:

$$\frac{v_o(t)}{R} + C\frac{d[v_o(t) - v_i(t)]}{dt} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}[v_o(t) - v_i(t)]dt = 0$$

türevi alınırsa;

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dt}v_o(t) + C\frac{d^2}{dt^2}v_o(t) - C\frac{d^2}{dt^2}v_i(t) + \frac{1}{L}v_o(t) - \frac{1}{L}v_i(t) = 0$$

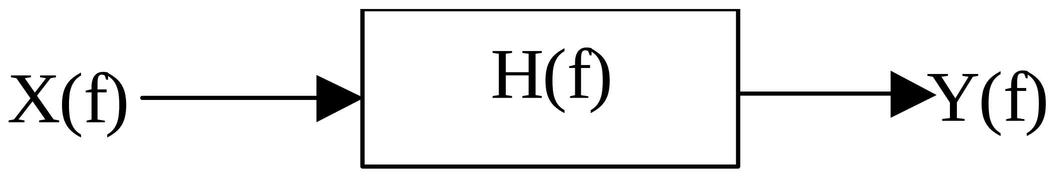
Fourier dönüşüm özelliğinden;

$$\left[LC(jw)^2 + \frac{L}{R}(jw) + 1\right].V_o(f) = \left[LC(jw)^2 + 1\right].V_i(f)$$

$$H(f) = \frac{V_o(f)}{V_i(f)} = \frac{1 - w^2LC}{1 - w^2LC + j\frac{wL}{R}}$$

Lineer Sistemin Sinüsoidal Cevabı

Transfer fonksiyonu H(f) olan aşağıdaki gibi bir sistemin girişine sinüzoidal bir işaret uygulansın. $x(t) = Sinw_0 t$ ise çıkış işaretinin spektrumunu bulalım.



$$Y(f) = X(f).H(f)$$

$$X(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - f_o\right) - \delta\left(f + f_o\right)\right]$$

$$Y(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta\left(f - f_o\right) - \delta\left(f + f_o\right)\right].H(f)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2j}\left[H(f_o)\delta\left(f - f_o\right) - H(-f_o)\delta\left(f + f_o\right)\right]$$

Lineer Sistemin Sinüsoidal Cevabı

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} Y(f).e^{jwt}df=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2j}[H(f_o).\delta(f-f_o)-H(-f_o).\delta(f+f_o)].e^{jwt}df$$

$$y(t)=\frac{1}{2j}.H(f_o).e^{jw_ot}-\frac{1}{2j}.H(-f_o).e^{-jw_ot}$$

Lineer zamanla değişmeyen sistemin transfer fonksiyonunun özelliğini tekrar hatırlarsak:

$$H(f_o)=|H(f_o)|.e^{jArgH(f_0)} \quad \Rightarrow \quad H(-f_o)=|H(f_o)|.e^{-jArgH(f_0)}$$

bu değerleri kullanarak:

$$y(t)=\frac{1}{2j}.|H(f_o)|.e^{jArgH(f_0)}.e^{jw_ot}-\frac{1}{2j}.|H(f_o)|.e^{-jArgH(f_0)}.e^{-jw_ot}$$

$$y(t)=|H(f_o)|.\frac{1}{2j}.\left(e^{j(w_ot+ArgH(f_0))}-e^{-j(w_ot+ArgH(f_0))}\right)$$

$$y(t)=|H(f_o)|.Sin(w_ot+ArgH(f_o))$$ bulunur.

Lineer Sistemin Sinüsoidal Cevabı

Sonuç olarak; giriş işareti bir sinüzoidal ise , lineer zamanla değişmeyen sistemin çıkış işareti genliği ve fazı $H(f_o)$ 'a bağlı olan bir sinüzoidal işarettir.

Eğer lineer zamanla değişmeyen sistemin girişine periyodik işaret uygulanır ise, bu durumda giriş işareti Fourier Serisine açılır ve giriş işareti sinüzoidal işaretlerin toplamı şeklinde elde edilir.

$$v(t)=v(t+T_o)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n.e^{jnw_0 t}=C_0+2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|.Cos(nw_o t+ArgC_n)$$

Lineer zamanla değişmeyen sistemin transfer fonksiyonu;

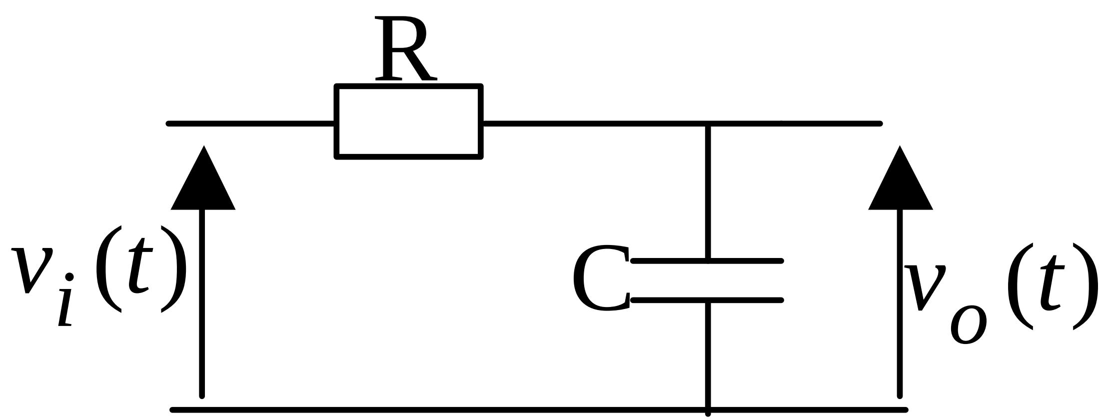
$H(f)=|H(f)|.e^{jArgH(f)}$ ise sistemin çıkışı;

$$y(t)=C_o|H(0)|.e^{jArgH(0)}+2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|.|H(nf_o)|.Cos(nw_o t+ArgC_n+ArgH(nf_o))$$

elde edilir.

Örnek 10.5

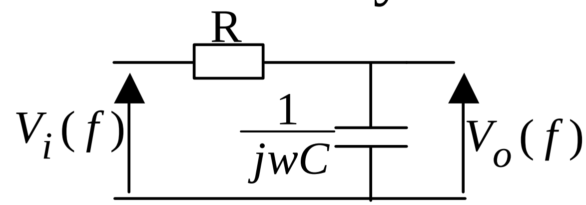
Alçak geçiren bir RC devresinde R=10KΩ ve C=1,59nF olsun. Sistemin girişine $v_i(t) = Cos\,2\pi.10^4 t$ uygulandığına göre, çıkış işaretini bulunuz.



Örnek 10.5

RC alçak geçiren filtrenin transfer fonksiyonu

$$H(f)=\frac{V_o(f)}{V_i(f)}=\frac{1}{1+jwRC}$$



olarak bulunmuştu.

1. Yol : Lineer zamanla değişmeyen sisteme sinüzoidal işaretin cevabından bulunabilir.

$$H(f)\big|_{f=10^4}=H(10^4)=\frac{1}{1+j.2.\pi.10^4.10^4.1{,}59.10^{-9}}=\frac{1}{1+j}=\frac{1-j}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{jtg^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)}$$

$$H(10^4)=\left|H(10^4)\right|.e^{jArgH(10^4)}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$y(t)=\left|H(f_o)\right|.Cos(w_ot+ArgH(f_o))=\frac{1}{\sqrt{2}}.Cos(2.10^4\pi t-\frac{\pi}{4})$$

Örnek 10.5

2. Yol : $Y(f) = H(f).V(f) \quad \Rightarrow \quad y(t) = F^{-1}[Y(f)]$

$$v_i(t) = Cos2\pi.10^4 t \quad \Rightarrow \quad V_i(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-10^4) + \delta(f+10^4)\right]$$

$$Y(f) = H(f).V_i(f) = \frac{1}{1+jwRC}.\frac{1}{2}\left[\delta(f-10^4) + \delta(f+10^4)\right]$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+j2\pi 10^4 RC}.\delta(f-10^4) + \frac{1}{2}\frac{1}{1-j2\pi 10^4 RC}.\delta(f+10^4)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+j}.\delta(f-10^4) + \frac{1}{2}\frac{1}{1-j}.\delta(f+10^4)$$

Örnek 10.5

2. Yol : $Y(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+j}.\delta(f-10^4) + \frac{1}{2}\frac{1}{1-j}.\delta(f+10^4)$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}.\delta(f-10^4) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}.\delta(f+10^4)$$

$$y(t) = F^{-1}[Y(f)] = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}.e^{j2\pi 10^4 t} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}.e^{-j2\pi 10^4 t}$$

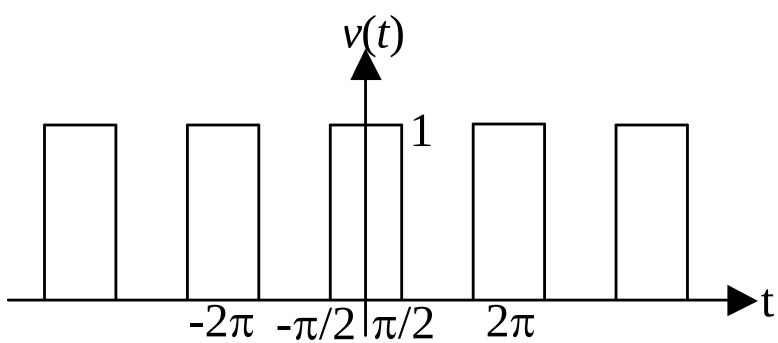
$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(.e^{j\left(2\pi 10^4 t - \frac{\pi}{4}\right)} + .e^{-j\left(2\pi 10^4 t - \frac{\pi}{4}\right)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.Cos\left(2\pi 10^4 t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.Cos 2\pi 10^4 (t - 125.10^{-7})$$

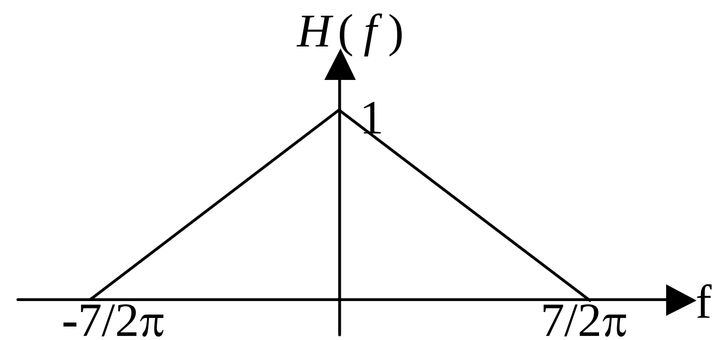
Örnek 10.6

Aşağıda şekilde verilen v(t) işareti transfer fonksiyonu H(f) olarak verilen sistemden iletiliyor.

1. Giriş işaretinin spektral güç yoğunluğunu ve rms değerini bulunuz.

2. Sistemin çıkışındaki işaretin rms değerini bulunuz.





Örnek 10.6

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t-2\pi n}{\pi}\right) \qquad v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n . e^{jnw_o . t}$$

$$C_n = \frac{A\tau}{T_o} . Sinc\frac{n\tau}{T_o} = \frac{\pi}{2\pi} Sinc\frac{n\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} Sinc\frac{n}{2}$$

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} Sinc\frac{n}{2} . e^{jn.t}$$

$$v(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(Cost - \frac{1}{3}Cos3t + \frac{1}{5}Cos5t - \frac{1}{7}Cos7t + \ldots\right)$$

$$< v^2(t) >= R(0) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots\right) = 0.5 volt^2$$

$$v_{rms} = \sqrt{< v^2(t) >} = \sqrt{0.5} = 0.707 volt$$

Örnek 10.6

2. $$H(f)=\begin{cases} -\frac{2\pi}{7}|f|+1 & |f|\le\frac{7}{2\pi} \\ 0 & |f|>\frac{7}{2\pi} \end{cases}$$

$$V(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}Sinc\frac{n}{2}.\delta\left(f-\frac{n}{2\pi}\right)$$

$$Y(f)=V(f).H(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}Sinc\frac{n}{2}.\delta\left(f-\frac{n}{2\pi}\right).H(f)=\sum_{n=-5}^{5}\frac{1}{2}Sinc\frac{n}{2}.\delta\left(f-\frac{n}{2\pi}\right).H(\frac{n}{2\pi})$$

$$H(0)=1 \qquad H(\frac{1}{2\pi})=\frac{6}{7} \qquad H(\frac{3}{2\pi})=\frac{4}{7} \qquad H(\frac{5}{2\pi})=\frac{2}{7} \qquad H(\frac{7}{2\pi})=0$$

$$Y(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{\pi}\left[\frac{6}{7}\delta\left(f-\frac{1}{2\pi}\right)+\frac{6}{7}\delta\left(f+\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\frac{1}{3\pi}\left[\frac{4}{7}\delta\left(f-\frac{3}{2\pi}\right)+\frac{4}{7}\delta\left(f+\frac{3}{2\pi}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{5\pi}\left[\frac{2}{7}\delta\left(f-\frac{5}{2\pi}\right)+\frac{2}{7}\delta\left(f+\frac{5}{2\pi}\right)\right]$$

Örnek 10.6

2.

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{12}{7\pi}.Cost-\frac{8}{21\pi}Cos3t+\frac{4}{35\pi}Cos5t$$

$$R(\tau)=\frac{1}{4}+\left(\frac{12}{7\pi}\right)^2.Cos\tau+\left(\frac{8}{21\pi}\right)^2Cos3\tau+\left(\frac{4}{35\pi}\right)^2Cos5\tau$$

$$R(\tau)\big|_{\tau=0}=<y^2(t)>=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\left(\frac{12}{7\pi}\right)^2Cos0+\frac{1}{2}.\left(\frac{8}{21\pi}\right)^2Cos0+\frac{1}{2}.\left(\frac{4}{35\pi}\right)^2Cos0=0.407\ \ volt^2$$

$$y_{rms}=\sqrt{<y^2(t)>}=\sqrt{0.407}=0.628\quad volt$$

olarak bulunur.

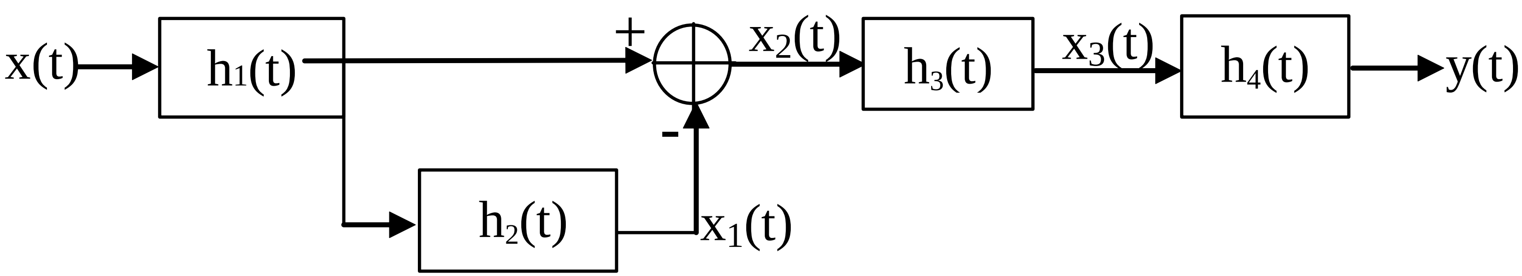
Örnek 10.7

Şekildeki lineer zamanla değişmeyen sistemin

$$h_1(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{Sinw_c t}{2\pi t}\right], \quad h_3(t) = \frac{Sin3w_c t}{\pi t}, \quad H_2(f) = e^{-jw/f_c}, \quad h_4(t) = u(t)$$

olduğuna göre ;

1. $H_1(f)$'i bulunuz ve çiziniz.
2. Sistemin h(t)'sini bulunuz.
3. $x(t) = Sin2w_c t + Cos\frac{1}{2}w_c t$ olduğuna göre y(t)'yi bulunuz.



Örnek 10.7

1. Fourier dönüşüm özelliklerinden

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{F} jwX(f)$$

$$m_1(t) = \frac{Sinw_c t}{2\pi t} = \frac{Sin2\pi f_c t}{2\pi t}\frac{.f_c}{f_c} = f_c.Sinc2f_c t = A\tau.Sinc\tau f$$

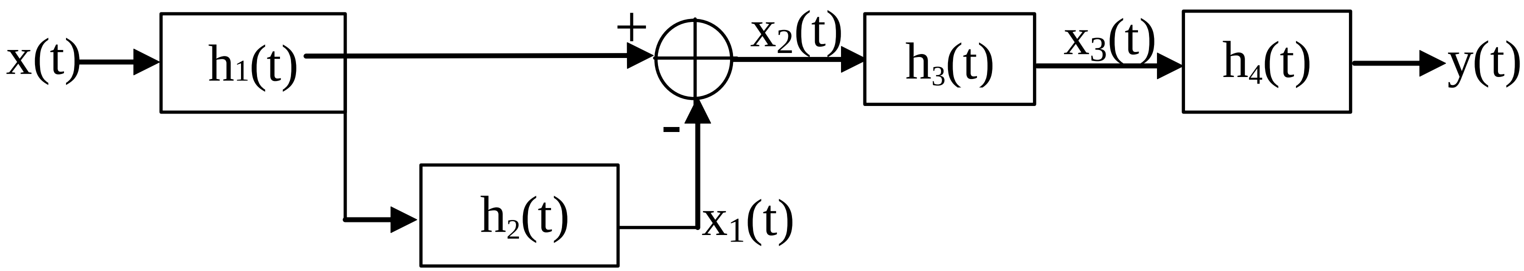
olduğundan

$$\left.\begin{aligned} A\tau &= f_c \\ \tau &= 2f_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad M_1(f) = \frac{1}{2}\prod\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$h_1(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{Sinw_c t}{2\pi t}\right] = \frac{d}{dt}m_1(t) \xleftrightarrow{F} H_1(f) = jwM_1(f) = jw\frac{1}{2}\prod\left[\frac{f}{2f_c}\right] = j\pi f\prod\left[\frac{f}{2f_c}\right]$$

bulunur.

Örnek 10.7



2. Çıkış işaretinin zaman düzlemindeki ifadesi;

$$x_2(t) = h_1(t) * x(t) - x_1(t)$$

$$x_1(t) = h_1(t) * x(t) * h_2(t)$$

$$x_3(t) = x_2(t) * h_3(t)$$

$$y(t) = x_3(t) * h_4(t)$$

$$y(t) = \left(h_1(t) * x(t) - h_1(t) * x(t) * h_2(t)\right) * h_3(t) * h_4(t)$$

elde edilir.

Örnek 10.7

Frekans düzleminde ise;

$$Y(f) = [H_1(f).X(f) - H_1(f).H_2(f).X(f)].H_3(f).H_4(f)$$

elde edilir. Transfer fonksiyonu da;

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = [1 - H_2(f)].H_1(f).H_3(f).H_4(f)$$

$$h_3(t) = \frac{Sin3.2\pi f_c t}{\pi t} = \frac{Sin6\pi f_c t}{\pi t}.\frac{6f_c}{6f_c} = 6f_c Sinc6f_c t \xleftrightarrow{F} H_3(f) = \Pi\left(\frac{f}{6f_c}\right)$$

$$h_4(t) = u(t) \xleftrightarrow{F} H_4(f) = \frac{1}{jw}$$

Örnek 10.7

$$H_1(f).H_3(f).H_4(f) = j\pi f \prod\left[\frac{f}{2f_c}\right].\Pi\left(\frac{f}{6f_c}\right)\left(\frac{1}{jw}\right)$$

$$H_1(f).H_3(f).H_4(f) = j\pi f\,\frac{1}{jw}\prod\left[\frac{f}{2f_c}\right] = \frac{1}{2}\prod\left[\frac{f}{2f_c}\right]$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = [1 - H_2(f)].H_1(f).H_3(f).H_4(f) = \left[1 - e^{-jw/f_c}\right].\frac{1}{2}\prod\left[\frac{f}{2f_c}\right]$$

$$H(f) = \frac{1}{2}(1 - e^{-jw/f_c})\prod\left[\frac{f}{2f_c}\right]$$

Örnek 10.7

3. $x(t) = Sin2w_c t + Cos\frac{1}{2}w_c t$ olduğunda çıkış işareti;

$$X(f) = \frac{1}{2j}[\delta(f-2f_c)-\delta(f+2f_c)] + \frac{1}{2}\left[\delta(f-\frac{1}{2}f_c)+\delta(f+\frac{1}{2}f_c)\right]$$

$$Y(f) = H(f).X(f)$$

$$Y(f) = \frac{1-e^{-jw/f_c}}{2}\prod\left[\frac{f}{2f_c}\right]\left(\frac{1}{2j}[\delta(f-2f_c)-\delta(f+2f_c)]+\frac{1}{2}\left[\delta(f-\frac{1}{2}f_c)+\delta(f+\frac{1}{2}f_c)\right]\right)$$

$$Y(f) = \frac{1-e^{-jw/f_c}}{2}\prod\left[\frac{f}{2f_c}\right].\frac{1}{2}\left[\delta(f-\frac{1}{2}f_c)+\delta(f+\frac{1}{2}f_c)\right]$$

$$Y(f) = \frac{1-e^{-j\pi f_c/f_c}}{4}\delta(f-\frac{1}{2}f_c)+\frac{1-e^{j\pi f_c/f_c}}{4}\delta(f+\frac{1}{2}f_c)$$

Örnek 10.7

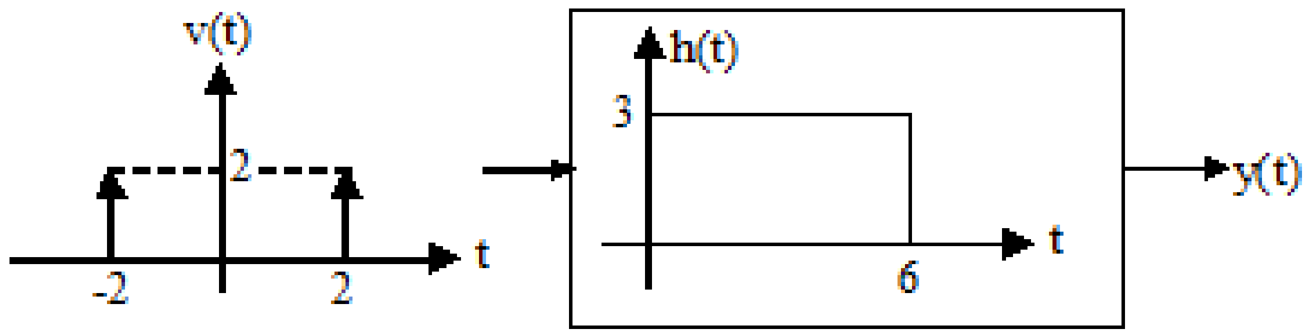
$$Y(f)=\frac{1-e^{-j\pi}}{4}\delta(f-\frac{1}{2}f_c)+\frac{1-e^{j\pi}}{4}\delta(f+\frac{1}{2}f_c)=\frac{1}{2}\delta(f-\frac{1}{2}f_c)+\frac{1}{2}\delta(f+\frac{1}{2}f_c)$$

$$y(t)=F^{-1}\left[\frac{1}{2}\delta(f-\frac{1}{2}f_c)+\frac{1}{2}\delta(f+\frac{1}{2}f_c)\right]=\frac{1}{2}e^{j\frac{w_c}{2}t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{w_c}{2}t}$$

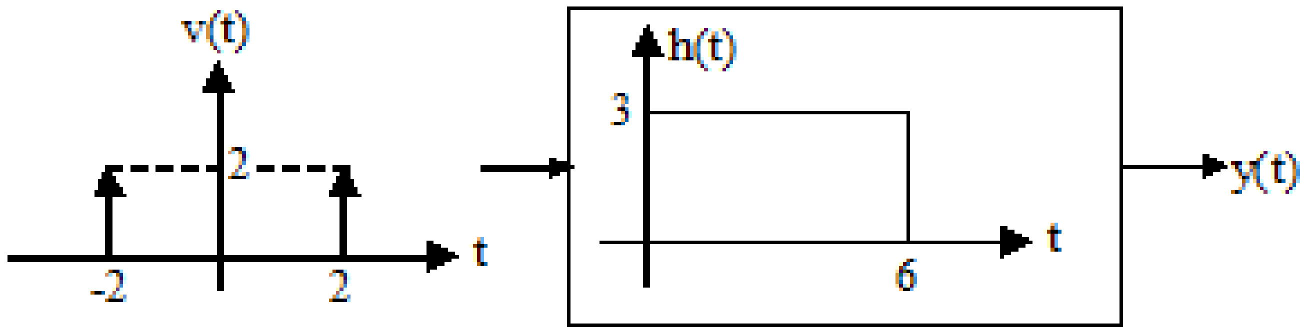
$$y(t)=Cos\frac{w_c}{2}t$$

Kısa Sınav

Aşağıda verilen sistemin çıkışı y(t)'yi bulunuz ve çiziniz.



Kısa Sınav Cevabı



$$y(t) = v(t) * h(t)$$

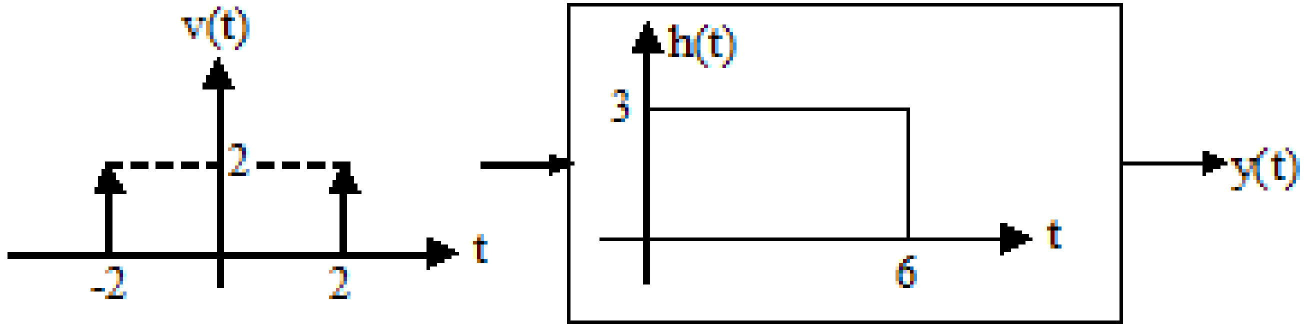
$$v(t) = 2\delta(t+2) + 2\delta(t-2)$$

$$h(t) = 3\prod\left(\frac{t-3}{6}\right)$$

$$y(t) = 3\prod\left(\frac{t-3}{6}\right) * [2\delta(t+2) + 2\delta(t-2)] = 6\prod\left(\frac{t+2-3}{6}\right) + 6\prod\left(\frac{t-2-3}{6}\right)$$

$$y(t) = 6\prod\left(\frac{t-1}{6}\right) + 6\prod\left(\frac{t-5}{6}\right)$$

Kısa Sınav Cevabı



$$y(t) = 6\Pi\left(\frac{t-1}{6}\right) + 6\Pi\left(\frac{t-5}{6}\right)$$